DATE LA

# مساواتوں کا نظریہ

جلد اوّل

سلسلۂ نصابات تعلیم جامعۂ عثمانیہ

# مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

تصنیف

ڈبلیو ۔ ایس ۔ برنسائڈ ایم ۔ اے، ڈی ۔ ایس ۔ سی
اے ۔ ڈبلیو ۔ پینٹن ایم ۔ اے، ڈی ۔ ایس ۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم ۔ اے (عثمانیہ)
رکن دار الترجمہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۳ھ سنہ ۱۳۴۳ف سنہ ۱۹۳۴ع

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

# فہرست مضامین

## مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

## تمہید

دفعہ صفحہ



## پہلا باب

### کثیر الارقام کے عام خواص

# دوسرا باب

## مساواتوں کے عام خواص

دفعہ صفحہ



# تیسرا باب

## مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان روابط اور اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال



# چوتھا باب

## مساواتوں کا استحالہ

دفعہ | صفحہ



# پانچواں باب

## متکافی اور ثنائی مساواتوں کا حل

# چھٹا باب

## کعبی اور چار درجی کا جبری حل

دفعہ صفحہ

# ساتواں باب

## مشتق تفاعلوں کے خواص



# آٹھواں باب

## اصلوں کے متشاکل تفاعل

دفعہ صفحہ



# نواں باب

## مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں



# دسواں باب

## مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

# گیارہواں باب

## عددی مساواتوں کا حل

دفعہ صفحہ

# بارھواں باب

## ملتف اعداد اور ملتف متغیر

۴۸۶

(1)

# مساواتوں کا نظریہ

## تمہید

**۱۔ تعریفات:۔** کسی ریاضی جملہ کو جس میں ایک مقدار شامل ہو اس مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔
ہمیں خاصکر ایسے جبری جملوں سے سابقہ پڑے گا جو منطق اور مکملہ ہونگے۔
کسی مقدار کے منطق تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف منطق شکل میں موجود ہو یعنی ایسی شکل میں جو کسری قوت نما اور علامت جذر سے آزاد ہو۔ کسی مقدار کے مکملہ تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف مکملہ شکل میں موجود ہو یعنی کسر کے نسب نما میں ہرگز نہ آئے۔ مثلاً جملہ ذیل جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے لا کا ایک منطق اور مکملہ جبری تفاعل ہے:۔

$$\text{ا لا}^{\text{ن}} + \text{ب لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ج لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ک لا} + \text{ل}$$

یہ یاد رہے کہ یہ تعریف صرف مقدار لا کے لحاظ سے ہے جس کا جملہ بالا تفاعل قرار دیا گیا ہے۔ مختلف سر ا، ب، ج وغیرہ غیر منطق یا کسری ہو سکتے ہیں اور پھر بھی لا کا یہ تفاعل منطق اور مکملہ ہوگا۔
اختصار کی خاطر لا کا تفاعل فا (لا)، ف (لا)، فہ (لا) یا ایسی ہی

کسی علامت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
ایسے جبری تفاعل کو کثیر الارقام اس وجہ سے کہا جاتا ہے کہ وہ لا کی
مختلف قوتوں والی رقموں سے جو مثبت یا منفی علامتوں سے ملا دی (2)
گئی ہوں بنتا ہے۔
اگر لا کو متغیر قرار دیا جائے تو اس کی بعض قیمتوں کے لئے ایک کثیر الارقام دوسرے کثیر الارقام کے مساوی ہو سکتا ہے جو بالکل جداگانہ طور پر بنا ہو۔ اس قسم کے ربط کو اگر جبری طور پر ظاہر کیا جائے تو اس کو **مساوات** کہتے ہیں اور لا کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرے اس مساوات کی اصل کہلاتی ہے۔ تمام ممکن اصلوں کو معلوم کرنے کا نام مساوات کا مکمل حل ہے۔
یہ ظاہر ہے کہ تمام رقموں کو ایک طرف لانے سے ہم کسی مساوات کو لا کی نزولی قوتوں میں حسب ذیل طریقہ پر ترتیب دے سکتے ہیں:-

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} = 0$$

اس مساوات میں چونکہ بڑی سے بڑی قوت ن ہے اس لئے اس کو لا میں **ن ویں درجہ** کی مساوات کہتے ہیں۔ ایسی مساوات کے لئے ہم عام طور پر شکل مندرجہ بالا استعمال کریں گے۔ ا کے لاحقہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کونسا عددی سر لا کی کس قوت کے ساتھ ہے کیونکہ ہر رقم میں لا کی قوت اور ا کے لاحقہ کا مجموعہ ن رہتا ہے۔ کوئی مساوات نہیں بدلتی اگر ہم اس کی سب رقموں کو کسی مقدار سے تقسیم کریں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو $\text{ا}_0$ سے تقسیم کر کے مساوات بالا میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ایک بنا سکتے ہیں۔ اس قسم کا عمل اکثر سہولت بخش ہوگا اور ایسی صورتوں میں مساوات بالا شکل

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

میں لکھی جائے گی۔
مساوات کو مکمل ہم اس وقت کہیں گے جب اس میں ن سے صفر تک

قوت رکھنے والی لا کی سب رقمیں موجود ہوں اور غیر مکمل اس وقت جب بعض رقمیں موجود نہ ہوں یعنی جب $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$ ...... وغیرہ سروں میں سے بعض صفر کے مساوی ہوں۔ رقم $ب_ن$ کو جس میں لا شامل نہیں ہے مطلق رقم کہتے ہیں۔ مساوات کو عددی یا جبری کہا جائے گا بموجب اس کے کہ اس کے سر اعداد یا جبری حروف ہوں۔

**۲۔ عددی اور جبری مساواتیں** ۔ ریاضیات و طبیعات کی اکثر تحقیقوں میں بالآخر ہم ایک ایسے ریاضی مسئلہ پر پہنچتے ہیں جو ایک مساوات کی شکل میں رونما ہوتا ہے اور اس مساوات کے حل پر اس مسئلہ کا حل منحصر ہوتا ہے۔ اس لئے یہ فطری بات ہے کہ تاریخ سائنس کی ابتدائی منزل میں ہی علماء ریاضی کی توجہ اس نوعیت کے سوالات کی طرف منعطف ہوئی چنانچہ نظریہ معادلات کا علم جو اسوقت (3)
موجود ہے علماء ریاضی کی مسلسل کوششوں کا نتیجہ ہے جو انہوں نے کسی درجہ کی مساواتوں کے حل کرنے کے لئے عام طریقوں کے دریافت کرنے میں صرف کیں۔ جب کسی مساوات کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو ایسی عددی قیمت یا جہاں ممکن ہو ایسی مختلف عددی قیمتوں کے دریافت کرنیکا مسئلہ پیش ہوتا ہے جو اس مساوات کو پورا کریں۔ نظریہ معادلات کے اس شعبہ میں بہت بڑی ترقی ہو چکی ہے اور اصلوں کی عددی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بہترین طریقے جو اب تک معلوم ہوئے خواہ یہ قیمتیں تقریبی ہوں یا بالکل ٹھیک اس کتاب میں اپنے اپنے مناسب مقام پر درج کئے جائیں گے۔

اتنی ہی ترقی اُن مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں نہیں ہوئی جن کے سر جبری حروف ہوں۔ طالب علم یہ جانتا ہوگا کہ مساوات درجہ دوم کی اصل کو ایک عام ضابطہ کی شکل میں سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے جبکہ مساوات کے سر حروف سے تعبیر ہوں اور یہ کہ کسی خاص عددی مساوات کی عددی اصلیں اس ضابطہ میں حروف کی بجائے متناظر اعداد مندرج کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ اس لئے فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسی قسم کا ضابطہ اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے

حل کے لئے دریافت کرنا ممکن ہے چنانچہ اس قسم کے ضابطے تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں کے لئے حاصل کر لئے گئے ہیں لیکن اس کے ساتھ یہ بات بتا دینا ضروری ہے کہ بعض صورتوں میں ان ضابطوں میں حروف کی بجائے عددوں کے اندراج سے صحیح حل نہیں ملتا اور اس لئے اس لحاظ سے یہ ضابطے مساوات درجہ دوم کے جبری حل سے کمتر درجہ رکھتے ہیں۔

پانچویں اور اس سے اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے حل کے لئے اس قسم کے عام ضابطوں کو دریافت کرنے میں از حد کوششیں کی گئیں لیکن تحقیقات جدید سے یہ بات پایۂ ثبوت کو پہنچ چکی ہے کہ پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی مساوات کی اصل کو جذری علامتوں اور جبر و مقابلہ کے دوسرے عام اعمال کی مدد سے سروں کی رقوم میں بیان کرنا ناممکن ہے۔

۴ — **کثیر الارقام**۔ مشاہدات ماسبق سے ظاہر ہے کہ نظریہ معادلات کے علم کا ایک اہم مقصد متغیر مقدار لا کی وہ قیمتیں معلوم کرنا ہے جن کے اندراج سے کثیر الارقام ف (لا) کی قیمت صفر ہو جائے۔ لا کی ایسی قیمتوں کو معلوم کرنے کی کوشش میں متعدد سوالات پیش ہونگے جو لا کی دوسری قیمتوں کے لئے کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں سے متعلق ہونگے۔ چنانچہ آئندہ باب میں فی الواقعی ہم یہ دیکھیں گے کہ لا انتہا بڑی منفی مقدار (− ∞) سے لا انتہا بڑی مثبت مقدار (+ ∞) تک متغیر ہونے والی لا کی قیمتوں کے مسلسل سلسلہ کے جواب میں ف (لا) بھی ایسی قیمتیں اختیار کرتا ہے جو مسلسل بدلتی ہیں۔ اس قسم کے تغیرات کا علم کثیر الارقام کے نظریہ کا ایک بہت ہی اہم حصہ ہے۔ عددی مساواتوں کا عام حل فی الحقیقت محنت طلب عمل ہے اور متغیر لا کی بعض اختیاری قیمتوں کے جواب میں کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں پر غور کرنے سے گو ہم خود اصل کو نہ معلوم کر سکیں کم از کم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ مساوات کی اصل کن حدود کے اندر واقع ہے اور پھر اپنے عمل کو وسیع تر کر کے زیادہ قریب تر حدود دریافت کر سکتے ہیں۔ (4)

کثیر الارقام کو بعض اوقات کثیر درجی ( Qrantic ) کہا جاتا ہے ۔ مختلف درجوں کے کثیر درجی جملوں کو مختلف نام دینا سہولت بخش ہے چنانچہ دو درجی، سہ درجی (کعبی) چہار درجی، پنج درجی، شش درجی وغیرہ اُن کثیر درجی جملوں کو تعبیر کرنے میں استعمال ہونگے جو علی الترتیب دوسرے تیسرے چوتھے، پانچویں، چھٹے وغیرہ درجوں کے ہوں ۔ ان کثیر درجی جملوں کو صفر کے مساوی رکھنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو علی الترتیب مساوات درجہ دوم، مساوات درجہ سوم یا کعبی مساوات، مساوات درجہ چہارم وغیرہ کہتے ہیں۔

(5)

۷۸۶

# پہلا باب

## کثیرالارقام کے عام خواص

۴ — متغیر (لا) کی مختلف قیمتوں کے متناظر کثیرالارقام کی قیمت میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے وقت ہمیں پہلے یہ دریافت کرنا ہوگا کہ جب متغیر لا کو بہت بڑی یا بہت چھوٹی قیمت دیجائے تو کثیرالارقام میں اہم ترین حصہ لینے والی ارقام کونسی ہونگی ۔ اس باب کے مختلف دفعات میں اسی پر روشنی ڈالی جائیگی ۔

کثیرالارقام $\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$ کو شکل

$$\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}}\left[۱ + \frac{\text{ا}_{۱}}{\text{ا}_{.}}\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{ا}_{.}}\frac{۱}{\text{لا}^{۲}} + \frac{\text{ا}_{۳}}{\text{ا}_{.}}\frac{۱}{\text{لا}^{۳}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-۱}}{\text{ا}_{.}}\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{.}}\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right]$$

میں رکھنے سے ظاہر ہے کہ جب 'لا' $\infty$ کی طرف مائل ہوتا ہے تو کثیرالارقام کی قیمت رقم $\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}}$ کی طرف مائل ہوتی ہے ۔ مسئلہ ذیل سے ایک ایسی مقدار معلوم ہوسکے گی کہ اوسکو یا اوس سے بڑی مقدار کو لا کی بجائے کثیرالارقام میں مندرج کریں تو رقم $\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}}$ کی قیمت باقی تمام ارقام کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوگی ۔ آئندہ ہم $\text{ا}_{.}$ کو مثبت فرض کرینگے اور بالعموم مساواتوں اور کثیرالارقاموں کی اعلیٰ ترین قوت والی رقم مثبت علامت کی فرض کی جائیگی ۔

مسئلہ :- اگر کثیرالارقام

$$\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

میں لا کی بجائے $\frac{\text{ک}}{\text{ا}_{.}} + ۱$ یا اس سے بڑا عدد مندرج کیا جائے جہاں 'ک' سروں $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$، $\text{ا}_{۳}$ .... $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں سے بلالحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے تو رقم $\text{ا}_{.}\text{لا}^{\text{ن}}$ باقی

سب رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

نامساوات

$$\text{ا}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

(6) پوری ہوگی لا کی کسی ایسی قیمت کے لئے جو نامساوات

$$\text{ا}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{ک}\,(\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots + \text{لا} + 1)$$

کو پورا کرے جہاں ک سروں $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$، ...... $\text{ا}_{\text{ن}}$ میں سے بلالحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے۔ خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

$$\text{ا}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} > \text{ک}\,\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - 1}{\text{لا} - 1}$$

$$\text{یا}\quad \text{لا}^{\text{ن}} > \frac{\text{ک}}{\text{ا}_{.}(\text{لا} - 1)}\,(\text{لا}^{\text{ن}} - 1)$$

یہ نامساوات پوری ہوگی اگر

$$\text{ا}_{.}\,(\text{لا} - 1) > \text{یا} = \text{ک}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{لا} > \text{یا} = \frac{\text{ک}}{\text{ا}_{.}} + 1$$

یہاں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے اُس صورت میں جبکہ کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں ہم ایک ایسا عدد معلوم کرسکتے ہیں کہ جب لا کو $+\infty$ سے قریب تر قیمتیں دی جائیں تو کثیر الارقام کی علامت ہمیشہ مثبت رہیگی۔ اگر ہم لا کی علامت بدل دیں تو کثیر الارقام کی پہلی رقم کی علامت باقی رہے گی یا منفی ہو جائے گی بموجب اس کے کہ ن جفت عدد ہو یا طاق۔ اس سے ظاہر ہے کہ مسئلہ بالا کی مدد سے ہم لا کی ایک ایسی منفی قیمت بھی دریافت کرسکتے ہیں کہ $-\infty$ سے قریب تر قیمتوں کے لئے کثیر الارقام کی علامت ہمیشہ مثبت ہوگی یا منفی بموجب اِسکے کہ ن جفت ہو یا طاق۔ عام طور پر کثیر الارقام کی ترکیب ایسی ہوتی ہے کہ ہم یہاں معلوم کی ہوئی حدود سے زیادہ صحیح حدود جو صفر سے قریب ہوں دریافت کرسکتے ہیں جن کے باہر تفاعل

کی علامت ہمیشہ وہی رہیگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مندرجہ بالا ثبوت میں ہم نے ناموافق ترین صورت لی ہے جسمیں پہلے سر کے سوائے باقی تمام سر منفی اور $ا_ک$ کے مساوی ہیں حالانکہ عام طور پر سر مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔ کسی آیندہ باب میں ہم وہ مسئلے کو بیان کریں گے جن کی مدد سے یہ زیادہ صحیح حدود دریافت کی جا سکتی ہیں۔

۵ — اب ہم یہہ دریافت کریں گے کہ اگر لا کی قیمت غیر محدود طور پر گھٹائی جائے تو کثیر الارقام کی کونسی رقم سب سے زیادہ اہمیت رکھتی ہے۔ نیز ہم ایک ایسی مقدار دریافت کرینگے کہ لا کی بجائے اسکو یا اس سے چھوٹی کسی قیمت کو درج کرنے سے مذکورۂ بالا رقم باقی سب رقموں پر غالب ہو جائے۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$ا_۰ لا^{ن} + ا_۱ لا^{ن-۱} + ا_۲ لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_{ن-۱} لا + ا_ن \qquad (7)$$

میں لا کی بجائے $\frac{ا_ن}{ا_ن + ا_ک}$ یا اس سے چھوٹی قیمت مندرج کی جائے جہاں $ا_ن$ کو چھوڑ کر سب سے بڑا سر $ا_ک$ ہے تو رقم $ا_ن$ بلحاظ قیمتِ مطلق باقی تمام رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $لا = \frac{1}{ما}$ تو دفعہ ۴ کے مسئلہ سے چونکہ سروں $ا_۰، ا_۱، ا_۲ \ldots ا_{ن-۱}$ میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر $ا_ک$ ہے ما کی قیمت $\frac{ا_ک}{ا_ن} + ۱$ یا اس سے بڑی قیمت کے لئے

$$ا_ن ما^{ن} > ا_{ن-۱} ما^{ن-۱} + ا_{ن-۲} ما^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_۱ ما + ا_۰$$

یعنی

$$ا_ن > ا_{ن-۱} \frac{1}{ما} + ا_{ن-۲} \frac{1}{ما^{۲}} + ا_{ن-۳} \frac{1}{ما^{۳}} + \cdots\cdots + ا_۰ \frac{1}{ما^{ن}}$$

پس $\frac{ا_ن}{ا_ن + ا_ک}$ یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے

$$\text{ا}_{\text{ن}} > \text{ا}_{\text{ن}-١}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-٢}\,\text{لا}^{٢} + \ldots\ldots + \text{ا}_{٠}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

یہ مسئلہ دوسرے الفاظ میں اکثر اس طرح بیان کیا جاتا ہے :-
لا کی اتنی چھوٹی قیمتیں مقرر کی جا سکتی ہیں کہ انکے اندراج سے کثیر الارقام

$$\text{ا}_{\text{ن}-١}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-٢}\,\text{لا}^{٢} + \ldots\ldots + \text{ا}_{١}\,\text{لا}^{\text{ن}-١} + \text{ا}_{٠}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔
اس بیان کی تصدیق ثبوت بالا سے ظاہر ہے کیونکہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ کو مقررہ مقدار خیال کیا جا سکتا ہے ۔۔ ایک اور مفید شکل میں مسئلہ بالا اس طرح پیش کیا جا سکتا ہے :-
جب متغیر لا کو بہت چھوٹی قیمت دی جائے تو کثیر الارقام

$$\text{ا}_{\text{ن}-١}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-٢}\,\text{لا}^{٢} + \text{ا}_{\text{ن}-٣}\,\text{لا}^{٣} + \ldots\ldots + \text{ا}_{١}\,\text{لا}^{\text{ن}-١} + \text{ا}_{٠}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

کی علامت وہی ہوگی جو رقم اول $\text{ا}_{\text{ن}-١}\,\text{لا}$ کی ہے ۔
یہ بات کثیر الارقام کو شکل

$$\text{لا}\left[\text{ا}_{\text{ن}-١} + \text{ا}_{\text{ن}-٢}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-٣}\,\text{لا}^{٢} + \ldots\ldots + \text{ا}_{٠}\,\text{لا}^{\text{ن}-١}\right]$$

میں رکھنے سے بخوبی واضح ہے کیونکہ جب لا کو کافی چھوٹی قیمت دیجاتی ہے تو رقم $\text{ا}_{\text{ن}-١}$ کی قیمت خطوط وحدانی کے اندر کی تمام دوسری رقموں کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوتی ہے اور اس لئے جملہ کی علامت $\text{ا}_{\text{ن}-١}$ کی علامت پر منحصر ہوگی۔

## (8) ٦ ـــ متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی۔ مشتق تفاعل۔

اب ہم اس شکل کا امتحان کرینگے جو کثیر الارقام اختیار کرتا ہے جبکہ لا کی بجائے لا + ھ درج کیا جائے ۔ اگر ہم ھ کو لازماً مثبت فرض کریں تو کثیر الارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کے اضافہ کے جواب میں ہوگی اور اس میں اگر ھ کی علامت بدل دی جائے

تو کثیر الارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کو گھٹانے کے جواب میں ہوگی۔

جب لا بدل کر لا + ھ ہو جائے تو ف (لا) بدلکر ف (لا + ھ) یعنی

$$\text{ا}_0(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}} + \text{ا}_1(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-1}(\text{لا}+\text{ھ}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

ہو جائے گا۔

فرض کرو کہ اس جملہ کی ہر رقم کو مسئلۂ ثنائی کی مدد سے پھیلایا گیا ہے اور پھر جملہ کو ھ کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$+\,\text{ھ}\left[\text{ن}\,\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + (\text{ن}-1)\,\text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-2)\,\text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots + 2\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\right]$$

$$+\,\frac{\text{ھ}^2}{1\times 2}\left[\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + (\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \dots + 2\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\right] + \dots\dots\dots$$

$$+\,\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{1\times 2\times 3\times \dots \times \text{ن}}\left[\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots\dots 2\times 1\right]\text{ا}_0$$

یہ ظاہر ہے کہ جملہ بالا کا وہ حصہ جس میں ھ شامل نہیں ہے ف (لا) ہے اور یہ کہ ھ کی مختلف قوتوں کے متواتر سر لا کے ایسے جملے ہیں جن کے درجے بقدر ایک کے گھٹتے جاتے ہیں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ھ کا سر جملۂ ف (لا) سے حاصل ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ف (لا) کی ہر رقم کو اس کی قوت سے ضرب دیا جائے اور اس رقم کی قوت کو بقدر ایک کے گھٹا یا جائے اور رقم کی علامت برقرار رکھی جائے۔ ف (لا) کی تمام رقموں کے ساتھ یہی عمل کیا جائے تو ان کا مجموعہ ایسا کثیر الارقام ہوگا جس کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹا ہوا ہوگا۔

اس کثیر الارقام کو ف (لا) کا پہلا مشتق کہتے ہیں۔ عام طور پر اسکو فَ (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب فَ (لا) پر بالکل اسی طرح کا عمل کرنے سے $\frac{\text{ھ}^2}{1\times 2}$ کا سر حاصل ہو سکتا ہے
جسطرح کہ فَ (لا)، ف (لا) سے حاصل کیا گیا یا اسطرح کہ ف (لا) پر دوبار (9)

یہ عمل کیا جائے۔ اس سر کو فً (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور اسکو ف (لا) کا دوسرا مشتق کہتے ہیں۔ بالکل اسی طرح کے طریق عمل سے یکے بعد دیگرے ھ کے دوسرے سرٍ دں کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اور اس لئے ترقیم متذکرہ بالا کو استعمال کرنے سے ہم نتیجہ بالا کو شکل ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں:-

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ھ}\,\text{فَ}(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۱\times۲}\,\text{فً}(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^{۳}}{۱\times۲\times۳}\,\text{فً}'(\text{لا}) + \cdots\cdots + \text{ا}\,\text{ھ}^{\text{ن}}$$

یہ یاد رہے کہ چونکہ لا اور ھ کو آپس میں بدل دینے سے ف (لا + ھ) بدل نہیں جاتا اس لئے اس کے پھیلاؤ کو شکل ذیل میں بھی رکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{ھ}) + \text{لا}\,\text{فَ}(\text{ھ}) + \frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times۲}\,\text{فً}(\text{ھ}) + \cdots + \text{ا}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

ہم بالعموم وہ ترقیم استعمال کرینگے جو یہاں سمجھائی گئی ہے۔ بعض اوقات مشتق تفاعیل فَ (لا)، فً (لا)، فً' (لا)، ...... کو بنظر سہولت $\text{ف}_{۱}(\text{لا})$، $\text{ف}_{۲}(\text{لا})$، $\text{ف}_{۳}(\text{لا})$، ..... سے بھی تعبیر کیا جائیگا۔ مثلاً ایسی صورت میں ف (لا + ھ) کے پھیلاؤ کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جائیگا۔

$$\text{ف}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{ف}(\text{ھ}) + \text{ھ}\,\text{ف}_{۱}(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۱\times۲}\,\text{ف}_{۲}(\text{لا}) + \frac{\text{ھ}^{۳}}{۱\times۲\times۳}\,\text{ف}_{۳}(\text{لا}) + \cdots\cdots + \frac{\text{ھ}^{\text{ر}}}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times\text{ر}}\,\text{ف}_{\text{ر}}(\text{لا}) + \cdots$$

## مثال

کثیر الارقام ۴ لا³ + ۶ لا² − ۷ لا + ۴ میں لا کی بجائے لا + ھ مندرج کریں تو نتیجہ معلوم کرو۔

یہاں

$$\text{ف}(\text{لا}) = ۴\,\text{لا}^{۳} + ۶\,\text{لا}^{۲} - ۷\,\text{لا} + ۴$$

$$\text{فَ}(\text{لا}) = ۱۲\,\text{لا}^{۲} + ۱۲\,\text{لا} - ۷$$

$$\text{فً}(\text{لا}) = ۲۴\,\text{لا} + ۱۲$$

$$\text{فً}'(\text{لا}) = ۲۴$$

اور اس لئے نتیجہ ہوگا ۴ لا$^{۳}$ + ۶ لا$^{۲}$ − ۷ لا + ۴ + ھ (۱۲ لا$^{۲}$ + ۱۲ لا − ۷) + $\frac{\text{ھ}^{۲}}{۲}$ (۲۴ لا + ۱۲)

+ ۲۴ $\frac{\text{ھ}^{۳}}{۱ \times ۲ \times ۳}$ ۔ اندراج کے عمل سے اس کی تصدیق طالب علم خود کرلے۔

## ۷ ۔ لا کے ایک منطق مکملہ تفاعل کا تسلسل :- اگر ایک منطق اور مکملہ تفاعل

ف (لا) میں لا کی قیمت لاانتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ ایک مقدار ا سے ایک
دوسری بڑی مقدار ب تک بدلی جائے تو ہم ثابت کرینگے کہ ف (لا) کی قیمت بھی اس اثناء (10)
میں لاانتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ بدلتی جائے گی۔ بہ الفاظ دیگر ہم ثابت کریں گے
کہ ف (لا)، لا کے ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

فرض کرو کہ لا، ا سے ا + ھ ہو جاتا ہے تو اس کے جواب میں ف (لا) کا اضافہ ہوگا

ف (ا + ھ) − ف (ا)

اور یہ دفعہ ۶ کی رو سے

$$\text{ھ ف}'(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۱ \times ۲}\,\text{ف}''(\text{ا}) + \ldots\ldots + \text{ا}_{۰}\,\text{ھ}^{\text{ن}}$$

کے مساوی ہے جس میں ف′ (ا)، ف″ (ا)، ..... محدود مقداریں ہیں ۔ اب دفعہ ۵ کے مسئلہ سے اس آخری جملہ کی قیمت کو، ھ کو کافی چھوٹا لینے سے، کسی مقررہ مقدار سے کم بنایا جا سکتا ہے ۔ پس ف (ا + ھ) اور ف (ا) کا فرق اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق بالآخر ھ کے ساتھ صفر ہو جائیگا۔ ا سے ب تک لا کے تغیر کی تمام منزلوں میں یہ بات درست رہتی ہے اور اس لئے ف (لا) کا تسلسل ثابت ہو جاتا ہے ۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ہم نے یہاں یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (ا) سے ف (ب) تک ف (لا) مسلسل بڑھتا ہے ۔ ف (لا) مسلسل بڑھ سکتا ہے یا مسلسل گھٹ سکتا ہے یا چند مقامات پر بڑھتا اور باقی مقامات پر گھٹ سکتا ہے لیکن ثبوت بالا سے ظاہر ہے کہ وہ ایک قیمت سے دوسری قیمت دفعتاً یا وقت واحد میں اختیار نہیں کر سکتا اور اس لئے جب، لا، ا سے ب تک

مسلسل بڑھتا ہے تو ف (لا) کی تمام متناظر قیمتیں ف (ا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ فَ (لا) کی علامت سے یہ معلوم ہو سکیگا کہ ف (لا) آیا بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ کیونکہ دفعہ ۵ سے یہ بات واضح ہے کہ ھ کافی چھوٹا ہو تو پورے اضافہ کی علامت رقم ھ فَ (ا) کی علامت پر منحصر ہوتی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب فَ (ا) مثبت ہو تو ف (لا)، لا کے ساتھ بڑھتا ہے اور فَ (ا) منفی ہو تو ف (لا) لا کے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

## ۸۔ خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے :۔

فرض کرو کہ کثیر الارقام

$$\text{ا}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

کو لا - ھ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت حاصل ہوتا ہے (11)

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{ب}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-2}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}-1}$$

اس کو ق سے اور باقی کو ر سے تعبیر کرو تو مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$\text{ف}\,(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{ھ})\,\text{ق} + \text{ر}$$

اس مساوات کے یہ معنی ہیں کہ اگر ق کو لا - ھ سے ضرب دیکر اس میں ر جمع کیا جائے تو نتیجہ ف (لا) کے مماثل ہونا چاہئے اور اسکی ہر رقم ف (لا) کی متناظر رقم کے مماثل ہونی چاہئے اس قسم کی مساواتوں کو دوسری مساواتوں سے جو تماثلات نہیں ہوتیں ممتاز کرنے کے لئے مساوات کی معمولی علامت استعمال کرنے کی بجائے علامت بالا اختیار کرنا سہولت بخش ہوگا۔ تماثلہ کی بائیں جانب کا جملہ ہے

$$\text{ب}_{\cdot}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \left\{\begin{matrix}\text{ب}_{1}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{\cdot}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \left\{\begin{matrix}\text{ب}_{2}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{1}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \left\{\begin{matrix}\text{ب}_{3}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{2}\end{matrix}\right\}\text{لا}^{\text{ن}-3} + \ldots\ldots + \left\{\begin{matrix}\text{ب}_{\text{ن}-1}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-2}\end{matrix}\right\}\text{لا} + \left\{\begin{matrix}\text{ر}\\ -\text{ھ}\,\text{ب}_{\text{ن}-1}\end{matrix}\right\}$$

دونوں جانبوں کے لا کے سروں کو مساوی رکھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل

ہوتی ہیں جن سے $\text{ب}_0$، $\text{ب}_1$، $\text{ب}_2$، ..... $\text{ب}_{n-1}$ کا تعین ہو جاتا ہے۔

$$\text{ب}_0 = \text{ا}_0$$
$$\text{ب}_1 = \text{ب}_0\,\text{ھ} + \text{ا}_1$$
$$\text{ب}_2 = \text{ب}_1\,\text{ھ} + \text{ا}_2$$
$$\text{ب}_3 = \text{ب}_2\,\text{ھ} + \text{ا}_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{ب}_{n-1} = \text{ب}_{n-2}\,\text{ھ} + \text{ا}_{n-1}$$
$$\text{ر} = \text{ب}_{n-1}\,\text{ھ} + \text{ا}_n$$

ان مساواتوں سے خارج قسمت کے سروں $\text{ب}_0$، $\text{ب}_1$، $\text{ب}_2$، .... کو اور باقی ر کو یکے بعد دیگرے آسانی کے ساتھ حاصل کرنیکا طریقہ ملتا ہے۔ اس غرض کے لئے ہم سلسلہ اعمال کو حسب ذیل طریقہ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ا}_0 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 & \cdots\cdots & \text{ا}_{n-1} & \text{ا}_n \\ & \text{ب}_0\text{ھ} & \text{ب}_1\text{ھ} & \text{ب}_2\text{ھ} & \cdots\cdots & \text{ب}_{n-2}\text{ھ} & \text{ب}_{n-1}\text{ھ} \\ \hline \text{ب}_0 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 & \cdots\cdots & \text{ب}_{n-1} & \text{ر} \end{array}$$

پہلی سطر میں ف (لا) کے سر علی الترتیب لکھے گئے ہیں۔ دوسری سطر کی پہلی رقم $\text{ا}_0$ کو
(یا $\text{ب}_0$ کو جو اس کے مساوی ہے) ھ سے ضرب دیکر حاصل کی گئی ہے اور حاصل ضرب (12)
$\text{ب}_0$ ھ کو $\text{ا}_1$ کے نیچے رکھ کر اسے $\text{ا}_1$ میں جمع کرنے سے تیسری سطر کی پہلی رقم $\text{ب}_1$
حاصل کی گئی ہے۔ اس حاصل شدہ رقم کو ھ سے ضرب دیکر $\text{ا}_2$ کے نیچے رکھا گیا ہے
اور حاصل ضرب کو $\text{ا}_2$ میں جمع کرکے تیسری سطر کی دوسری رقم حاصل کی گئی ہے۔ اس
عمل کی تکرار سے خارج قسمت کے تمام سر یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے اور
اس طور پر حاصل شدہ آخری مقدار باقی کو تعبیر کریگی۔ چند مثالوں سے اس طریقہ کی

وضاحت ہو جائے گی۔

## امثلہ

۱۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۳لا^۴ – ۵لا^۳ + ۱۰لا^۲ + ۱۱لا – ۶۱ کو لا – ۳ سے تقسیم کیا جائے۔ محسوب کرنے کا طریقہ حسب ترتیب ذیل ہوگا۔

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۶۱ – | ۱۱ | ۱۰ | ۵ – | ۳ |
| ۲۳۱ | ۶۶ | ۱۲ | ۹ | |
| ۱۷۰ | ۷۷ | ۲۲ | ۴ | |

اس لئے خارج قسمت ۳لا^۳ + ۴لا^۲ + ۲۲لا + ۷۷ اور باقی ۱۷۰ ہے۔

۲۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ لا^۳ + ۵لا^۲ + ۳لا + ۲ کو لا – ۱ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^۲ + ۶لا + ۹،

ر = ۱۱

۳۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^۵ – ۴لا^۴ + ۷لا^۳ – ۱۱لا – ۱۳ کو لا – ۵ سے تقسیم کیا جائے۔

**نوٹ** ۔ اگر کسی کثیر الارقام میں کوئی رقم غائب ہو تو ف (لا) کے سر لکھتے وقت اس رقم کے سر کے بجائے صفر لکھنا ہوگا مثلاً اس مثال میں پہلی سطر اس طرح لکھی جائے گی۔

۱　۴–　۷　۰　– ۱۱　– ۱۳

جواب ق = لا^۴ + لا^۳ + ۱۲لا^۲ + ۶۰لا + ۲۸۹، ر = ۱۴۳۲

۴۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^۹ + ۳لا^۷ – ۱۵لا^۲ + ۲ کو لا – ۲ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^۸ + ۲لا^۷ + ۷لا^۶ + ۱۴لا^۵ + ۲۸لا^۴ + ۵۶لا^۳

+ ۱۱۲لا^۲ + ۲۰۹لا + ۴۱۸، ر = ۸۳۸

۵۔ ق اور ر معلوم کرو جبکہ لا^۵ + لا^۲ – ۱۰لا + ۱۳ کو لا + ۴ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا^۴ – ۴لا^۳ + ۱۶لا^۲ – ۶۳لا + ۲۴۲، ر = – ۸۵۵

**تفاعلوں کی جدول** ۔ اگر کسی کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو دفعہ گزشتہ کی مدد سے ہم بہ آسانی لا کی کسی قیمت کے جواب میں ف (لا) کی

قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

کیونکہ مساوات

ف (لا) ≡ (لا − ھ) ق + سا

پوری ہونی چاہیئے خواہ لا کی بجائے کوئی مقدار درج کیجائے کیونکہ اس کے طرفین 18
متماثلاً مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ھ تو ف (ھ) = سا، کیونکہ لا − ھ = ۰ اور ق محدود ہے۔
پس ف (لا) میں لا کی بجائے ھ درج کرنے سے ہم وہ باقی حاصل کرتے ہیں جو ف (لا) کو لا − ھ سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔ اس باقی کو گزشتہ دفعہ کی مدد سے بہ آسانی معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً دفعہ ۸ کی مثال (۱) کے کثیر الارقام

۴ لا$^4$ − ۵ لا$^3$ + ۱۰ لا$^2$ + ۱۱ لا − ۶۱

میں لا کی بجائے ۳ درج کرنے سے ۱۷۰ حاصل ہوتا ہے جو کثیر الارقام کو لا − ۳ سے تقسیم کرنے کی صورت میں باقی ہے۔ طالب علم عملی طور پر ۳ درج کرکے اسکی تصدیق کرسکتا ہے۔

کثیر الارقام

لا$^5$ + لا$^2$ − ۱۰ لا + ۱۱۳

میں لا کی بجائے −۴ درج کرنے سے −۸۵۵ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ کی مثال ۵ سے ظاہر ہے۔ ہم نے دفعہ ۷ میں یہ دیکھا ہے کہ جب لا، −∞ سے +∞ تک بڑھنی والی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ اختیار کرتا ہے تو اس سلسلہ کے جواب میں ف (لا) بھی ایک مسلسل سلسلہ میں سے گزرتا ہے۔

اگر ہم کسی کثیر الارقام میں جس کے سر دیے ہوئے اعداد ہیں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے اعداد کا ایک سلسلہ درج کریں مثلاً سلسلہ

−۵، −۴، −۳، −۲، −۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵ ......

کے اعداد اور ان کے جواب میں ف (لا) کی قیمتوں کو محسوب کریں تو اس عمل کو ہم تفاعل کی جدول بنانے کا عمل کہہ سکتے ہیں۔

## امثلہ

۱ــــ لا کی حسب ذیل قیمتوں

-۴، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴

کے تناظر جملہ ۲ لا$^{۲}$ + لا - ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

| لا کی قیمتیں | -۴ | -۳ | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ف (لا) " | ۲۲ | ۹ | ۰ | -۵ | -۶ | -۳ | ۴ | ۱۵ | ۳۰ |

۲ــــ لا کی انہی قیمتوں کے لئے جملہ ۱۰ لا$^{۳}$ - ۱۷ لا$^{۲}$ + لا + ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

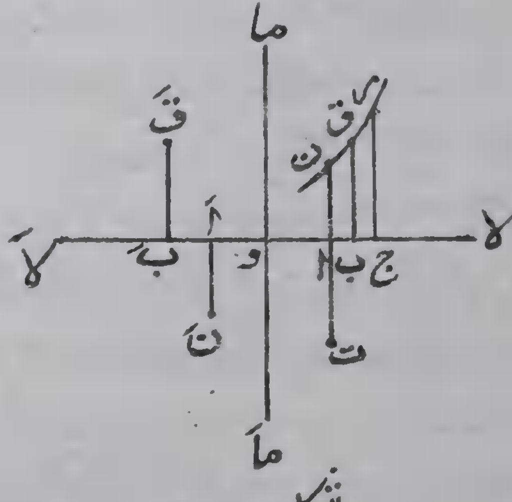
| لا کی قیمتیں | -۴ | -۳ | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ف (لا) " | -۹۱۰ | -۴۲۰ | -۱۴۴ | -۲۲ | ۶ | ۰ | ۲۰ | ۱۲۶ | ۳۷۸ |

**۱۰ــــ کثیر الارقام کی ترسیمی تعبیر۔** متغیر کی تبدیلیوں کے جواب میں کثیر الارقام کی تبدیلیوں کی تحقیق کرنے کے لئے ظاہر ہے کہ ایک ایسا طریقہ جس سے کثیر الارقام 19
کی مختلف قیمتوں کا مقابلہ ایک دوسرے سے بہ آسانی ہو سکے بہت مفید ہوگا۔ اُس کثیر الارقام کی صورت میں جس کے سر معلومہ اعداد ہوں لا کی کسی مفروضہ قیمت کے جواب میں تفاعل کی ایک معین قیمت ہوگی۔

ہم ترسیمی تعبیر کے ایک طریقہ کی توضیح کریں گے جس سے لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ف (لا) کی متناظر قیمتیں نظر کے سامنے آجاتی ہیں۔

فرض کرو کہ دو خطوطِ مستقیم و لا اور و ما (شکل (۱)) ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دونوں سمتوں میں اِن کو غیر محدود طور پر خارج کیا گیا ہے ان کو علی الترتیب محور لا اور محور ما کہتے ہیں۔ و کے سیدھے طرف محور لا پر و سے پیمایش شدہ فاصلے مثلاً و ا، و ب وغیرہ مثبت سمجھے جاتے ہیں اور و کے بائیں جانب محور لا پر کے فاصلے مثلاً و اَ منفی۔ لا لا کے اوپر و ما کے متوازی خطوط مثلاً ا ن یا ب ق مثبت اور اس کے نیچے مثلاً ا ت یا اَ نَ منفی سمجھے جاتے ہیں۔ طالب علم نے علم مثلث میں اِن قراردادوں سے

اچھی واقفیت حاصل کی ہوگی۔




شکل (۱)

و لا پر کوئی اختیاری طول اکائی کا کام دے سکتا ہے اور کوئی مثبت یا منفی عدد اس اکائی کی رقوم میں لا لاَ پر تعبیر ہو سکتا ہے۔ خط و لا پر ۰ سے لے کر + ∞ تک بڑھنے والے اور خط و لاَ پر ۰ سے - ∞ تک گھٹنے والے اعداد تعبیر ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی عدد م، و ا سے تعبیر ہوتا ہے۔ ف (م) کی قیمت معلوم کرو۔ ا سے ا ن، و ما کے متوازی کھینچو ایسے کہ ا ن، ف (م) کی قیمت کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرے جس پر و ا، م کو تعبیر کرتا ہے۔ ف (م) کی قیمت کی علامت سے یہ معلوم ہوگا کہ اس کو تعبیر کرنے والا طول لا لاَ کے اوپر لیا جائے یا نیچے۔ م کی مختلف قیمتوں و ا، و ب، و ج، وغیرہ کے جواب میں نقطوں کا ایک سلسلہ ن، ق، ر وغیرہ ملیگا اور اس طرح اگر ہم م کی قیمتوں کے سلسلہ کو لا انتہا بڑھائیں تاکہ + ∞ اور - ∞ کے درمیان تمام اعداد اس میں شامل ہوں تو یہ نقطے ایک مسلسل منحنی مرتسم کریں گے۔

اس منحنی پر کوئی نقطے لیکر ان سے محور لا پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں سے ف (لا) کی مختلف قیمتیں نظر کے سامنے آجائیں گی۔

اس عمل کو تفاعل (ف (لا)) کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل کہتے ہیں۔ علم ہندسہ تحلیلی سے واقف طالب علم فوراً پہچان لے گا کہ یہ دراصل منحنی ما = ف (لا) کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل ہے۔

اس طریقہ کے عملی استعمال میں اس طرح شروع کرنا بہتر ہوگا کہ پہلے لا کو مثبت یا منفی چند صحیح عددوں کے مساوی لیا جائے اور ان کے جواب

ہیں ف ( لا ) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ لا کی قیمتوں کو فصلہ اور ف ( لا ) کی متناظر قیمتوں کو معین قرار دیکر نقطے مرتسم کئے جائیں تب بالعموم یہ ممکن ہو گا کہ ہم ان نقطوں میں سے ایک ایسا منحنی کھینچ سکیں جو تفاعل کی قیمتوں پر روشنی ڈالے اور جس سے تفاعل کی نوعیت کا اندازہ ہو سکے۔ اس رسمی تعبیر کی صحت بلاشبہ ان نقطوں کی تعداد کے ساتھ بڑھیگی جو متغیر کی کسی دو دی ہوئی قیمتوں کے درمیان معلوم کئے گئے ہوں۔

جب کسی دو مجوزہ حدود کے اندر منحنی کے کسی حصہ کا احتیاط سے امتحان کرنا ہو تو ان حدود کے درمیان متغیر کو ایسی قیمتیں دینا اکثر ضروری ہو گا جن میں سے کسی دو متصلہ قیمتوں کا فرقِ اکائی سے چھوٹا ہو۔ امثلہ ذیل سے ان اصولوں کی توضیح ہو گی۔

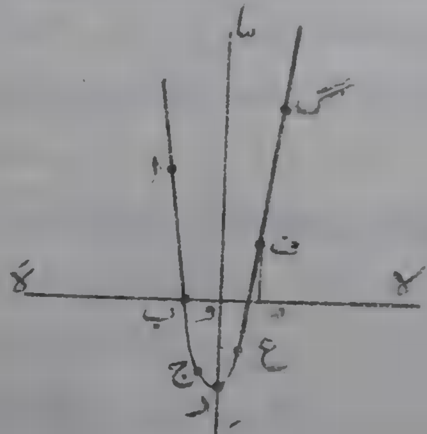
## امثلہ

۱ ـــ ۲ لا² + لا − ۶ کی ترسیم معلوم کرو۔

طول کی اکائی و د کا ½ لی گئی ہے (شکل ۲)۔

دفعہ ۹ کی مثال (۱) میں −۴ سے +۴ تک بشمول ہر دو اعداد لا کی صحیح عددی قیمتوں کے جواب میں ف ( لا ) کی قیمتیں دی ہوئی ہیں۔

ان قیمتوں کی مدد سے منحنی پر کے نو نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔ جن میں سے سات ا، ب، ج، د، ع، ف، گ یہاں مرتسم کئے گئے ہیں باقی دو نقطے اس شکل کے حدود سے باہر واقع ہیں۔



شکل (۲)

ج اور ع کے درمیان منحنی کو زیادہ صحت کے ساتھ مرتسم کرنا طالب علم کے لئے ایک مفید مشق ہوگی۔ یہ اس طرح ہوسکتا ہے کہ

ــ ۱ اور + ۱ کے درمیان لا کی بہت سی قیمتوں مثلاً ان تمام قیمتوں کے جواب میں جن کا فرق $\frac{۱}{۱۰}$ ہے ف (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ ذیل کی مثال میں اس قسم کا عمل کیا گیا ہے۔

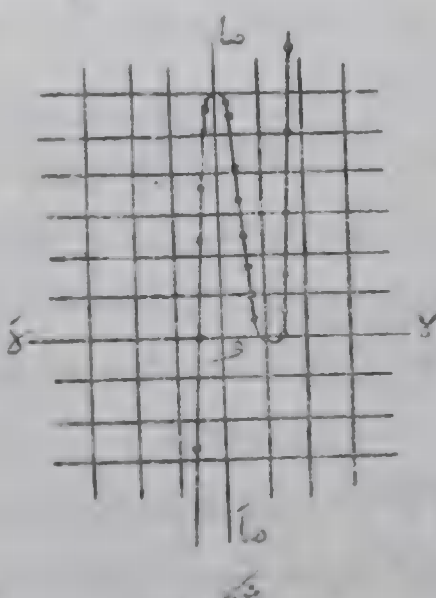
16 ۲ ــــ کثیر الارقام

$$۱۰ لا^{۳} - ۱۷ لا^{۲} + لا + ۶$$

کو مرتسم کرو۔

ــ ۴ اور ۴ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جدول دفعہ ۹ میں حاصل کر لی گئی ہے۔

دفعہ ۴ کی مشق کے طور پر یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ ۲٫۷ سے بڑی لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے یہ تفاعل ہمیشہ مثبت رہتا ہے اور ــ ۲٫۷ سے چھوٹی ــ ∞ تک لا کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل منفی قیمت رکھتا ہے۔ پس اگر منحنی محور لا کو قطع کرے گا تو ایسے نقطہ (یا نقطوں) پر قطع کرے گا جو ــ ۲٫۷ اور + ۲٫۷ کے درمیان لا کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں ہے۔ اس لئے اگر ہمارا مقصد صرف مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کے مقامات کا تعین کرنا یا ان کو تقریبی طور پر معلوم کرنا ہو تو جدول کو صرف ــ ۲٫۷ اور ۲٫۷ کے درمیانی وقفہ تک محدود رکھا جا سکتا ہے۔



شکل (۳)

یہ ایسی صورت ہے جس میں لا کی صرف صحیح عددی قیمتوں کے اندراج سے منحنی کو مرتسم کرنے میں بہت کم مدد ملتی ہے۔ اور اس لئے لا کو ایسی قیمتیں دینی ہونگی جن میں سے کسی دو متصلہ قیمتوں کا باہمی فرق بہت چھوٹا ہو۔ جدول ذیل میں ہم نے اعداد صحیح ــ ۱، ۰ اور ۰٫۱ اور ۱٫۱، ۲ کے درمیان $\frac{۱}{۱۰}$ کے وقفوں سے کام لیا ہے۔ ان قیمتوں سے منحنی پر کے متناظر نقطے تقریبی طور پر حاصل کئے جا سکتے ہیں اور منحنی کو مرتسم کیا جا سکتا ہے۔

دیکھو شکل (۳)

| لا کی قیمتیں | ۱- | ۱٫۹- | ۱٫۸- | ۱٫۷- | ۱٫۶- | ۱٫۵- | ۱٫۴- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ف (لا) " | ۲۲- | ۱۵٫۹۶- | ۱۰٫۸- | ۶٫۴۶- | ۲٫۸۸- | ۰ | ۲٫۲۴ |

| لا کی قیمتیں | ۱٫۳- | ۱٫۲- | ۱٫۱- |
|---|---|---|---|
| ف (لا) " | ۳٫۹ | ۵٫۰۴ | ۵٫۷۲ |

| لا کی قیمتیں | ۰ | ۰٫۱ | ۰٫۲ | ۰٫۳ | ۰٫۴ | ۰٫۵ | ۰٫۶ | ۰٫۷ | ۰٫۸ | ۰٫۹ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ف (لا) " | ۶ | ۵٫۹۴ | ۵٫۶ | ۵٫۰۴ | ۴٫۳۴ | ۳٫۵ | ۲٫۶۴ | ۱٫۸ | ۱٫۰۴ | ٫۴۲ |

| لا کی قیمتیں | ۱ | ۱٫۱ | ۱٫۲ | ۱٫۳ | ۱٫۴ | ۱٫۵ | ۱٫۶ | ۱٫۷ | ۱٫۸ | ۱٫۹ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ف (لا) " | ۰ | ٫۱۶- | ۰ | ٫۵۴ | ۱٫۵۲ | ۳ | ۵٫۰۴ | ۷٫۷ | ۱۱٫۰۴ | ۱۵٫۱۲ | ۲۰ |

مثال (۱) میں مرتسم شدہ منحنی محور لا کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے (یعنی جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ کے مساوی ہے) دوسرے الفاظ میں لا کی دو قیمتیں ایسی ہیں جن کے لئے دئیے ہوئے کثیر الارقام کی قیمت صفر ہوتی ہے۔ مساوات ۲ لا$^2$ + لا − ۶ = ۰ کی اصلیں یہ قیمتیں ہونگی یعنی −۲ اور ۱٫۵ –
اسی طرح مثال (۳) میں مرتسم شدہ منحنی محور لا کو تین نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ یعنی اُن نقطوں پر جو کعبی مساوات ۱۰ لا$^3$ − ۱۷ لا$^2$ + لا + ۶ = ۰ کی اصلوں کے جواب میں ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ دئیے ہوئے کثیر الارقام کو تعبیر کرنیوالا منحنی محور لا کو قطع نہ کرے یا اتنے نقطوں پر قطع کرے جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو۔ ایسی صورتیں مساواتوں کی خیالی اصلوں سے متعلق ہوتی ہیں جن پر باب آیندہ میں تفصیلی بحث کیجائیگی مثلاً کثیر الارقام ۲ لا$^2$ + لا + ۲ کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل اور مثال (۱) کے تفاعل میں صرف مستقل ۸ کا فرق ہے اس لئے اس کی ہر قیمت مثال (۱) کے تفاعل کی حاصل شدہ ہر قیمت میں صرف ۸ جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور پورا منحنی مرتسم شدہ منحنی کو محور ما کے متوازی (۸) اکائیوں کے فاصلہ تک اوپر دار حرکت دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مساوات ۲ لا$^2$ + لا + ۲ = ۰ کو حل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ متغیر لا کی وہ دو قیمتیں جو کثیر الارقام کو صفر بناتی ہیں اس صورت میں خیالی ہیں۔ منحنی محور لا کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے اُن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی محور لا کو 17

خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

**۱۱ — کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔** دفعات ماسبق سے یہ بات ظاہر ہے کہ جب متغیر لا، $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلتا ہے تو تفاعل ف (لا) میں بہت سے تغیرات واقع ہو سکتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ وہ کسی وقفہ میں بڑھتا جائے اور پھر بڑھنا چھوڑ دے اور گھٹنا شروع کرے۔ پھر گھٹنا چھوڑ دے اور مکرر بڑھنا شروع کرے جسکے بعد ممکن ہے کہ تفاعل کچھ وقفہ تک پھر گھٹنے لگے یا مسلسل بڑھتا جائے (جیسا کہ دفعہ ماسبق کی آخری مثال سے ظاہر ہے) اس نقطہ پر جہاں تفاعل بڑھنا چھوڑتا ہے اور گھٹنا شروع کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اعظم قیمت اختیار کی ہے اور جب تفاعل گھٹنا چھوڑتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اقل قیمت اختیار کی ہے تفاعل کی ایسی قیمتیں متعدد ہو سکتی ہیں۔ عام طور پر ان کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ پر منحصر ہوگی۔ سوائے ترسیمی تعبیر کے اور کوئی چیز تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے وقوع کو اتنی وضاحت سے ظاہر نہیں کر سکتی، نیز اُن تغیرات کو بھی جو تفاعل کی قیمتیں اختیار کرتی ہیں۔

18 دئے ہوئے کثیر الارقام کو مرتسم کرتے وقت تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں سے واقف ہونا منحنی کو مرتسم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے کیونکہ ان سے اُن نقطوں کے محل حاصل ہو گئے ہیں جہاں منحنی محور کے حوالہ سے مڑتا ہے۔ کسی آئندہ باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ ان نقطوں کا تعین ایسی مساوات کے حل پر منحصر ہوتا ہے جس کا درجہ دئے ہوئے تفاعل کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہو۔

یہ بتانا آسان ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتی ہیں کیوں کہ ایک قیمت اعظم کے جواب میں متغیر کی ایک قیمت حاصل ہوگی اور دوسری قیمت اعظم کے جواب میں دوسری۔ جب متغیر اپنی پہلی قیمت سے دوسری قیمت تک بڑھتا ہے تو تفاعل گھٹنے سے ابتدا کرتا ہے اور بڑھنے پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے ان دو اعظم قیمتوں کے درمیان کسی منزل پر ایک اقل قیمت اختیار کرتا ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دو اقل قیمتوں کے درمیان ایک اعظم قیمت ہونی چاہیئے۔

# دوسرا باب 19

## مساواتوں کے عام خواص

۱۲۔ تفاعل ف ( لا ) کو مرتسم کرنے کا عمل جس کی تشریح دفعہ (۱۰) میں کی گئی ہے ایک دی ہوئی عددی مساوات کی حقیقی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے کیونکہ جب کسی تفاعل کے جواب میں منحنی کو صحیح طور پر مرتسم کر لیا جاتا ہے تو مساوات ف ( لا ) = ۰ کی حقیقی اصلیں مبداء سے اُن نقطوں کے فاصلوں کو ناپنے سے تقریبی طور پر معلوم ہوتی ہیں جنپر منحنی محور کو قطع کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا عددی حل زیادہ صحیح طور پر معلوم کرنے اور نیز عددی اور جبری دونوں قسم کی مساواتوں پر بحث کرنیکے خیال سے اس باب میں ہم مساواتوں کی اہم ترین عام خاصیتوں کو اصلوں کی تعداد اور ان کے وجود اور حقیقی و خیالی اصلوں کے درمیان فرق کے حوالہ سے ثابت کرینگے۔

مسئلہ ذیل کی مدد سے اکثر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی مساوات میں حقیقی اصل کا وجود ہے یا نہیں۔

**مسئلہ**۔ اگر کسی کثیر الارقام ف ( لا ) میں مجہول مقدار لا کی بجائے دو حقیقی مقداریں ا اور ب درج کیجائیں اور اگر ان اندراجات کے نتیجے مختلف العلامت ہوں یعنی ایک منفی اور دوسرا مثبت تو مساوات ف ( لا ) = ۰ کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوگی جس کی قیمت ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی۔

ہم نے دفعہ (۷) میں یہ ثابت کیا ہے کہ تفاعل ف ( لا ) کی ایک خاصیت

اس کا تسلسل ہے۔ مسئلہ بالا تفاعل کی اس خاصیت سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ جب لا ا سے ب تک بدلتا ہے تو ف (لا) بھی ف (ا) سے ف (ب) تک مسلسل بدلتا ہے اور اس لئے تمام درمیانی قیمتوں کو یکے بعد دیگرے اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ ف (ا) اور ف (ب) میں سے ایک مقدار مثبت اور دوسری منفی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا اور ب کے درمیان لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو ف (لا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہے ف (لا) صفر قیمت اختیار کرتا ہے۔

20 تفاعل کی ترسیم معلوم کرنے سے طالب علم کو اس مسئلہ کے سمجھنے میں بہت مدد ملیگی۔ یہاں جو بات ثابت کی گئی ہے اور جو شکل دیکھنے سے بالکل واضح ہو جائے گی وہ یہ ہے کہ اگر کثیر الارقام کو تعبیر کرنے والے منحنی کے دو نقطے محور لا کی مخالف سمتوں میں ہوں یعنی ایک نقطہ محور لا کے اوپر اور دوسرا اس کے نیچے تو ان نقطوں کو ملانے والا منحنی محور کو کم از کم ایک بار قطع کرے گا۔ شکل دیکھنے سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ ا اور ب کے درمیان مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں جن کے لئے ف (لا) = ۰ یعنی جن کے لئے منحنی محور کو قطع کرتا ہے۔ مثلاً دفعہ (۱۰) شکل (۳) میں لا = - ۲ سے تفاعل کی منفی قیمت (- ۱۴۴) اور لا = ۲ سے تفاعل کی مثبت قیمت (۲۰) حاصل ہوتی ہے اور ان نقطوں کے درمیان منحنی محور لا کو تین جگہ قطع کرتا ہے۔

**نتیجہ صریح۔** اگر کوئی ایسی حقیقی مقدار موجود نہ ہو جس کے اندراج سے ف (لا) = ۰ ہو جائے تو لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے ف (لا) مثبت ہونا چاہیئے۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ (دفعہ ۴) لا = ∞ رکھنے سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے اور اس لئے لا کی کوئی قیمت اس کو منفی نہیں بنا سکتی اس وجہ سے کہ اگر اس قسم کی کوئی قیمت ہو تو اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات کی ایک حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے اور یہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ ترسیمی طریقہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے:۔ جب مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل حقیقی نہ ہو تو ف (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور لا کے

اوپر واقع ہوگا۔

**۱۳۔ مسئلہ۔** طاق درجے کی ہر مساوات میں کم از کم ایک حقیقی اصل ایسی ہوتی ہے جسکی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت سے مختلف ہوگی۔

دفعہ ما سبق کے مسئلے سے یہ نتیجہ فوراً اخذ ہوتا ہے۔ کثیر الارقام ف(لا) میں لا کی بجائے علی الترتیب − ∞، ۰، + ∞ مندرج کرو تو ان کے طاق ہونے کی وجہ سے (دیکھو دفعہ (۴)) نتیجے ہونگے

لا = − ∞ کے لئے ف (لا) منفی

لا = ۰ کے لیے ف (لا) کی علامت وہی جو ان کی ہے

لا = + ∞ کے لئے ف (لا) مثبت

اگر ان مثبت ہو تو − ∞ اور ۰ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی منفی اصل ہونی چاہیئے۔

اور اگر ان منفی ہو تو صفر اور ∞ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی 21
مثبت اصل ہونی چاہیئے۔ اس طرح مسئلہ بالا ثابت ہوگیا۔

**۱۴۔ مسئلہ۔** جفت درجہ کی ہر مساوات میں جسکی آخری رقم منفی ہو کم از کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

اس صورت میں − ∞، ۰، + ∞ کے اندراج سے نتیجے ہونگے

| لا کی قیمت | ف (لا) کی علامت |
|---|---|
| − ∞ | + |
| ۰ | − |
| + ∞ | + |

پس − ∞ اور صفر کے درمیان ایک حقیقی اصل اور صفر اور + ∞ کے درمیان دوسری حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے یعنی کم از کم ایک حقیقی منفی اصل اور ایک حقیقی مثبت اصل موجود ہونی چاہیئے۔

اس دفعہ اور دفعہ ما سبق دونوں میں ہم نے صرف اصلوں کا وجود ثابت کرنے پر اکتفا کی ہے اور اس مقصد کے لئے لا کی بجائے بہت بڑی مثبت یا منفی قیمتیں

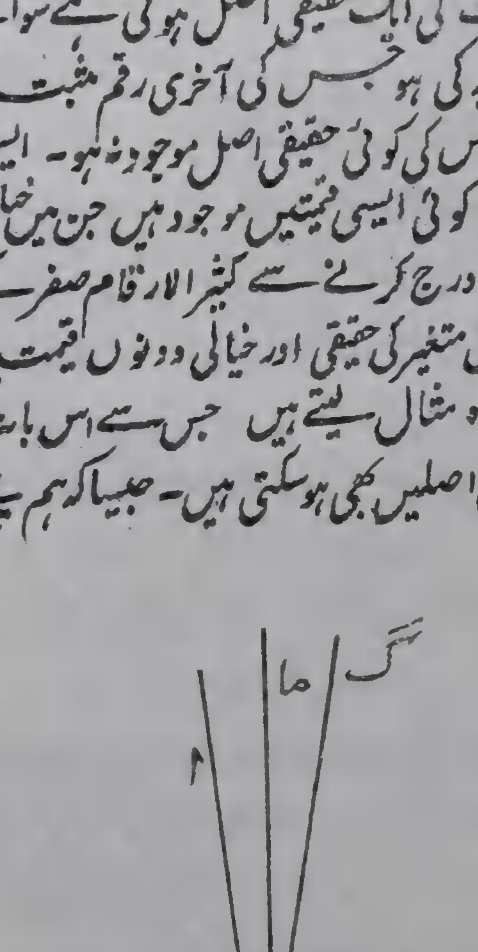
درج کرنا کافی ہے جیسا کہ ہم نے کیا ہے۔ لیکن دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے اُن حدود کو تنگ کرنا فی الواقعی ممکن ہے جن کے اندر مساوات کی اصلیں واقع ہوتی ہیں کسی آئندہ باب میں اصلوں کے حدود سے متعلق ایسے مسئلے دئیے جائیں گے جن کی مدد سے متذکرہ حدود کو اور زیادہ تنگ کرنا ممکن ہو جائے گا۔

## ۱۵۔ عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی۔ خیالی اصلیں۔

ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ہر مساوات کی ایک حقیقی اصل ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات جفت درجہ کی ہو جس کی آخری رقم مثبت ہو۔ ایسی مساوات کے لئے یہ ممکن ہے کہ اس کی کوئی حقیقی اصل موجود نہ ہو۔ ایسی صورت میں یہ امتحان کرنا ضروری ہے کہ آیا کوئی ایسی قیمتیں موجود ہیں جن میں خیالی اکائی $\sqrt{-1}$ شامل ہے اور جن کو لا کی بجائے درج کرنے سے کثیر الارقام صفر کے مساوی ہو جاتا ہے۔ یا یہ کہ بعض صورتوں میں متغیر کی حقیقی اور خیالی دونوں قیمتیں ہیں جو مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ ہم ایک سادہ مثال لیتے ہیں جس سے اس بات کی توضیح ہو جائے گی کہ مساواتوں کی خیالی اصلیں بھی ہو سکتی ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے
22 بیان کر چکے ہیں (دفعہ ۱۰) کثیر الارقام

ف (لا) = ۲ لا$^{۲}$ + لا + ۲

کے جواب میں جو منحنی ملتا ہے وہ کلاً محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل (۴))۔




شکل (۴)

مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے لیکن اس کی دو خیالی اصلیں

$$-\frac{۱}{۴} + \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\sqrt{-۱} ، -\frac{۱}{۴} - \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\sqrt{-۱}$$

موجود ہیں جو مساوات درجۂ دوم

کو حل کرنے سے ظاہر ہے ۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی قیمتوں کی عدم موجودگی میں بصورت موجودہ دو خیالی جملے ایسے ہیں جو کثیر الارقام کو صفر کے مساوی بنا دیتے ہیں ۔

چنانچہ عام مسئلہ یہ ہے کہ ہر منطق مکملہ مساوات میں ایک اصل شکل

$$\text{عہ} + \text{بہ}\sqrt{-1}$$

کی ہوتی ہے جہاں عہ اور بہ حقیقی محدود مقداریں ہیں ۔ اس بیان میں حقیقی اور خیالی دونوں اصلیں شامل ہیں کیونکہ بہ = ۰ سے حقیقی اصل ملیگی ۔ جب عہ اور بہ عدد ہوں تو جملہ عہ + بہ $\sqrt{-1}$ کو **ملتف عدد** کہتے ہیں ۔ جو کچھ ہم نے دعویٰ کیا ہے وہ یہ ہے کہ ہر عددی مساوات میں ایک حقیقی یا ملتف اصل ہوتی ہے ۔

چونکہ اس مسئلہ کے ثبوت میں ایسے اصولوں سے واسطہ پڑے گا جن کو یہاں بیان کرنا خالی از دقت نہیں ہے اور جو اپنے اپنے وقت پر اس کتاب کے مختلف حصوں میں بیان ہونگے اس لئے ہم ان اصولوں کے ثابت ہونے تک اس مسئلہ کے ثبوت کو ملتوی کرتے ہیں ۔ فی الحال ہم مسئلہ بالا کو تسلیم کئے لیتے ہیں اور اور اس سے چند نتیجے اخذ کرتے ہیں ۔

۱۶ ۔ **مسئلہ** ۔ ن درجے کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہونگی اور اس سے زیادہ نہیں ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات ف ( لا ) = ۰ کی ایک اصل کوئی مقدار ھ ہو تو ف ( لا ) ، ( لا ـ ھ ) سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا ۔ یہ بات دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کیونکہ اگر ف ( ھ ) = ۰ یعنی اگر ف ( لا ) = ۰ کی اصل ھ ہو تو ساکو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے ۔

اب فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے 23

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

اس مساوات کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہونی چاہیئے ( دفعہ ۱۵ ) جسکو ہم علامت عہ سے تعبیر کریں گے ۔ فرض کرو کہ ف ( لا ) کو لا ـ عہ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت

ف۱ (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

ف(لا) ≡ (لا − ع۱) ف۱(لا)

پھر مساوات ف۱(لا) = ۰، (ن − ۱) درجہ کی ایک مساوات ہے، اس کی بھی ایک اصل ہونی چاہیئے جسکو ہم ع۲ سے تعبیر کرینگے۔

فرض کرو کہ ف۱(لا) کو لا − ع۲ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت ف۲(لا) ہے تو

ف۱(لا) ≡ (لا − ع۲) ف۲(لا)

اور ∴ ف(لا) ≡ (لا − ع۱)(لا − ع۲) ف۲(لا)

جہاں ف۲(لا)، ن − ۲ درجہ کا جملہ ہے۔

اس عمل کو جاری رکھکر ہم یہ ثابت کرسکتے ہیں کہ ف(لا)، ن اجزائے ضربی اور ایک عددی جزو ضربی فن(لا) کا حاصل ضرب ہے، قبل الذکر اجزائے ضربی میں سے ہر ایک میں لا کی صرف پہلی قوت ہی داخل ہوتی ہے۔ اب لان کے سروں کا مقابلہ کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ فن(لا) ≡ ۱۔ اسی لئے مساوات متماثلہ

ف(لا) ≡ (لا − ع۱)(لا − ع۲)(لا − ع۳) ..... (لا − عن−۱)(لا − عن)

حاصل ہوتی ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے مقداروں ع۱، ع۲، ع۳ ...... عن میں سے کوئی ایک درج کی جائے تو یہ رکن صفر کے مساوی ہوتا ہے اور اسلئے ف(لا) بھی صفر کے مساوی ہوگا۔ یعنی مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلیں یہ مقداریں ع۱، ع۲، ع۳ ..... عن ہیں۔ ان اصلوں کے علاوہ کوئی اور اصلیں نہیں ہوسکتیں کیونکہ ع۱، ع۲، ع۳، ... عن کے علاوہ کوئی اور مقدار مساوات بالا کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے درج کی جائے تو اس رکن کا کوئی جزو ضربی صفر نہیں ہوتا اور اس لئے حاصل ضرب صفر کے مساوی

نہیں ہو سکتا۔

**نتیجہ صریح** - لا میں ن ویں درجہ کے دو کثیر الارقام لا کی ن قیمتوں سے زیادہ کے لئے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کہ جب دونوں متماثلاً مساوی ہوں۔

کیونکہ اگر ان کے فرق کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں ن وین درجہ کی مساوات ملے گی جو صرف لا کی ن قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ہر سر علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہو۔

اگرچہ کہ اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات ف (لا) = ۰ کو حل کرنے میں 24
کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اس کی مدد سے اس کے عکس کو ہم پوری طرح حل کر سکتے ہیں یعنی جب مساوات کی اصلیں دی گئی ہوں تو مساوات معلوم ہو سکتی ہے۔ دی ہوئی اصلوں میں سے ہر ایک کو لا میں سے تفریق کرو۔ تو جتنی اصلیں ہیں اتنے ثنائی جملے حاصل ہونگے۔ ان ثنائی جملوں کو باہم ضرب دو تو مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائے گی۔ اس مسئلہ کا ایک اور فائدہ یہ ہے کہ جب دی ہوئی مساوات کی ایک یا ایک سے زیادہ اصلیں دی گئی ہوں تو ایسی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جبکی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔ اس غرض کے لئے ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دئے ہوئے ثنائی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے دی ہوئی مساوات کو تقسیم کر دیا جائے۔ خارج قسمت مطلوبہ کثیر الارقام ہوگا جو باقی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا۔

## امثلہ

۱۔ وہ مساوات معلوم کرو جبکی اصلیں ہیں

-۳، -۱، ۴، ۵،

جواب:- لا$^{4}$ - ۵ لا$^{3}$ - ۱۳ لا$^{2}$ + ۵۳ لا + ۶۰ = ۰

۲۔ مساوات

لا$^{4}$ - ۶ لا$^{3}$ + ۸ لا$^{2}$ - ۱۷ لا + ۱۰ = ۰

کی ایک اصل ۵ ہے۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔ دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب: $لا^{۳} - لا^{۲} + ۳ لا - ۲ = ۰$

۳ — مساوات

$$لا^{۴} - ۱۶ لا^{۳} + ۸۶ لا^{۲} - ۱۷۶ لا + ۱۰۵ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۷ ہیں۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب: باقی دو اصلیں ۳، ۵ ہیں۔

۴ — ایک مساوات کی اصلیں

$$-\frac{۳}{۲}،\ ۳،\ \frac{۱}{۷}$$

ہیں۔ اس مساوات کو معلوم کرو۔

جواب: $۱۴ لا^{۳} - ۲۳ لا^{۲} - ۶۰ لا + ۹ = ۰$

۵ — کعبی مساوات

$$لا^{۳} - ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

یہاں یہ ظاہر ہے کہ لا = ۱، مساوات کو پورا کرتا ہے۔ لا - ۱ سے تقسیم کرکے خارج قسمت کو حل کرو تو باقی دو اصلیں ہونگی

$$-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}،\ -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}$$

۶ — ایک مساوات کی ایک غیر منطق اصل

$$\sqrt{ف} + \sqrt{ق}$$

ہے۔ اس مساوات کو معلوم کرو اس طرح کہ اس کے سر منطق ہوں۔

25 جذری علامتوں کے مختلف اجتماعوں کی بموجب اس جملہ کی چار مختلف قیمتیں ہونگی یعنی

$$\sqrt{ف} + \sqrt{ق}،\ -\sqrt{ف} - \sqrt{ق}،\ \sqrt{ف} - \sqrt{ق}،\ -\sqrt{ف} + \sqrt{ق}$$

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

$$(لا - \sqrt{ف} - \sqrt{ق})(لا + \sqrt{ف} + \sqrt{ق})(لا - \sqrt{ف} + \sqrt{ق})(لا + \sqrt{ف} - \sqrt{ق}) = ۰$$

یا

$$(لا^{۲} - ف - ق - ۲\sqrt{ف ق})(لا^{۲} - ف - ق + ۲\sqrt{ف ق}) = ۰$$

یا بالآخر

$$لا^{۴} - ۲(ف + ق) لا^{۲} + (ف - ق)^{۲} = ۰$$

۱۷ــ **مساوی اصلیں** ــ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) کے ن اجزائے ضربی میں سے سب کا ایک دوسرے سے مختلف ہونا ضروری نہیں ہے مثلاً جزو ضربی لا - عہ کی دوسری قوت یا اس سے بڑی قوت بشرطیکہ یہ ن سے متجاوز نہ ہو داخل ہوسکتی ہے ۔ ایسی صورت میں بھی ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں جن میں سے دو یا زیادہ ایک دوسرے کے مساوی ہیں ۔ اصل عہ کو مساوات کی ضعفی اصل کہتے ہیں یعنی دوہری تہری وغیرہ بموجب اس تعداد کے جتنے بار جزو ضربی تکرار پاتا ہے ۔

دفعہ (۱۰) شکل (۳) کی ترسیم دیکھنے سے ضعفی اصلوں کا واقع ہونا سمجھ میں آجائیگا اس شکل کا معائنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $۱۰\,لا^{۳} - ۱۷\,لا^{۲} + لا + ۶ = ۰$ کی دو مثبت اصلیں تقریباً مساوی ہیں اور ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک چھوٹا عدد جمع کیا گیا ہے جس کے معنی یہ ہیں کہ پورے منحنی کو چھوٹے فاصلہ میں اوپر وار متوازی حرکت دی گئی ہے تو اس کا اثر یہ ہوگا کہ اصلیں جو ابتدا میں تقریباً مساوی تھیں اب بالکل مساوی ہو جائینگی ۔ ایسی صورت میں خط د کا منحنی کو دو ممتاز نقطوں پر قطع نہیں کرے گا بلکہ اُس کو مس کریگا ۔ جب کوئی خط منحنی کو مس کرتا ہے تو یہ کہنا مناسب ہے کہ خط منحنی کو ایک نقطہ پر نہیں بلکہ دو **منطبق نقطوں** پر ملتا ہے ۔ وہ طالب علم جو مستوی منحنیوں کے نظریہ سے واقف ہے بلا تکلف اسی طرح تہری یا اس سے زیادہ ضعفی اصل کے واقع ہونے کی تشریح مثالوں سے کرسکتا ہے ۔

مساوی اصلیں، حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان ملانے والی کڑی کا کام کرتی ہیں ۔

ہم نے ابھی دیکھا ہے کہ دو حقیقی اصلیں رکھنے والا کثیر الارقام ذرا سی تبدیلی سے ایسی شکل میں بدلجاتا ہے جس میں دو حقیقی اصلیں مساوی ہو جاتی ہیں ۔ اگر اور ذرا سی تبدیلی کردی جائے تو ہم کثیر الارقام کو ایسی شکل میں بدل سکتے ہیں جس میں یہ دو اصلیں خیالی ہو جائیں ۔ 26

فرض کرو کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک اور چھوٹا عدد اضافہ کرنے سے اس کو مکرر بدل دیا گیا ہے تو ہمیں اس کی ایسی ترسیم ملے گی جس میں محور و لا منحنی کو صرف ایک حقیقی نقطہ پر قطع کریگا یعنی اُس نقطہ پر جو منفی اصل کے جواب میں ہے۔ وہ دو نقطے جو مثبت اصلوں کے جواب میں تھے اب غائب ہو جائیں گے۔

مثلاً کثیر الارقام ۱۰ لا$^3$ − ۱۷ لا$^2$ + لا + ۲۸ پر غور کرو جو دفعہ ۱۰ امثال (۲ کے کثیر الارقام میں ۲۲ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا ہے اسکی ترسیم کو بہ آسانی کھینچا جا سکتا ہے، شکل ۳ کے نقطہ ا کے جواب میں اب ایک ایسا نقطہ حاصل ہوگا جو محور لا کے بہت اوپر واقع ہوگا۔ لا + ۱ سے تقسیم کرو اور سہ رقمی جملہ (Trinomial، تین رقموں والا جملہ) ۱۰ لا$^2$ − ۲۷ لا + ۲۸ حاصل کرو جس میں بقیہ دو اصلیں موجود ہونگی۔ یہ دو اصلیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں اور وہ ہیں

$$\frac{27}{20} + \frac{\sqrt{391}}{20}\sqrt{-1}\,،\quad \frac{27}{20} - \frac{\sqrt{391}}{20}\sqrt{-1}$$

ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ جب کثیر الارقام کی شکل بدلی جاتی ہے اس غرض سے کہ ایک اصل غائب ہو جائے تو اس کے ساتھ ایک دوسری اصل بھی غائب ہو جاتی ہے اور اِن کی جگہ خیالی اصلوں کا ایک زوج لیتا ہے۔ اس کا سبب آئندہ دفعہ کے مسئلہ سے واضح ہوگا۔

## ۱۸۔ مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ثابت شدنی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے

اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل خیالی جملہ عہ + بہ $\sqrt{-1}$ ہو اور مساوات کے تمام سر حقیقی مقداریں ہوں تو اس کی ایک اور اصل مزدوج خیالی جملہ عہ − بہ $\sqrt{-1}$ بھی ہونی چاہیئے۔

مساوات ذیل متماثلہ ہے

(لا − عہ − بہ $\sqrt{-1}$) (لا − عہ + بہ $\sqrt{-1}$)

≡ (لا − عہ)$^2$ + بہ$^2$

فرض کرو کہ کثیر رقمی[1] ف (لا) کو اُس متماثلہ کے بائیں رکن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ باقی سا لا + سَا ہے تو مساوات متماثلہ ملے گی

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \{(\text{لا} - \text{عہ})^2 + \text{بہ}^2\}\,\text{ق} + \text{سا لا} + \text{سَا}$$

جہاں ق، (ن − ۲) درجی خارج قسمت ہے۔ اس مساوات شاملہ میں لا کی بجائے
عہ + بہ $\sqrt{-1}$ درج کرو تو بموجب فرض ف (لا) صفر ہوگا لیکن اس سے 27
(لا − عہ)$^2$ + بہ$^2$ بھی صفر ہوتا ہے۔ اسلئے

$$\text{سا}(\text{عہ} + \text{بہ}\sqrt{-1}) + \text{سَا} = 0$$

جس سے ہمیں دو مساواتیں

$$\text{سا عہ} + \text{سَا} = 0, \quad \text{سا بہ} = 0$$

ملتی ہیں کیونکہ حقیقی و خیالی حصے ایک دوسرے کو صفر نہیں بنا سکتے اور اس لئے ان کو علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔ پس

$$\text{سا} = 0, \quad \text{سَا} = 0$$

اس طرح باقی سا لا + سَا صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے ف (لا) دو اجزائے ضربی

$$\text{لا} - \text{عہ} - \text{بہ}\sqrt{-1}, \quad \text{لا} - \text{عہ} + \text{بہ}\sqrt{-1}$$

کے حاصل ضرب سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل عہ + بہ $\sqrt{-1}$ کے ساتھ عہ − بہ $\sqrt{-1}$ کو بھی اصل ہونا چاہیئے۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سروں والی کسی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے اور ہر کثیر رقمی کو حقیقی اجزائے ضربی سے ترکیب یافتہ خیال کیا جا سکتا ہے جس میں خیالی اصلوں کے ہر زوج سے ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی اور ہر حقیقی اصل سے ایک مفرد حقیقی جزو ضربی پیدا ہوتا ہے۔ کثیر رقمی کو ایسے اجزائے ضربی میں عملاً تحویل کر دینا مساوات کو پوری طرح حل کرنا ہے۔

ہم نے دفعہ ۱۲ میں یہ بیان کیا تھا کہ مساوی اصلوں کو حقیقی اور خیالی

[1] کثیر الارقام کو کثیر رقمی بھی کہا جاتا ہے۔

اصلوں کے درمیان ملانیوالی کڑی خیال کیا جاسکتا ہے اس بیان کو اب دوسرے نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کثیر رقمی کا ایک دو درجی جزو ضربی $(لا - عہ)^{۲} + ک$ ہے اور فرض کرو کہ ک کی قیمت میں چھوٹی تبدیلیوں کے ذریعہ کثیر رقمی کی شکل تبدیل کی گئی ہے۔ جب ک منفی ہوتا ہے تو اس دو درجی جزو ضربی سے حقیقی اصلوں کا ایک زوج حاصل ہوتا ہے۔ جب ک = ۰ تو اس جزو ضربی سے دو مساوی اصلیں عہ حاصل ہوتی ہیں اور جب ک مثبت ہو تو دو خیالی اصلیں ملتی ہیں۔

بالکل ایسے ہی ثبوت سے جیسے اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ شکل $عہ \pm \sqrt{جہ}$ کی اصم اصلیں مساواتوں میں زوج زوج داخل ہوتی ہیں جبکہ مساواتوں کے سر منطق ہوں۔

## مثالیں

28 ۱۔ وہ منطق کعبی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$۱ ، ۳ + ۲\sqrt{-۱}$$

جواب: $لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + ۱۹ لا - ۱۳ = ۰$

۲۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی دو اصلیں ہیں

$$۱ + ۵\sqrt{-۱} ، ۵ - \sqrt{-۱}$$

جواب: $لا^{۴} - ۱۲ لا^{۳} + ۷۲ لا^{۲} - ۳۱۲ لا + ۶۷۶ = ۰$

۳۔ مساوات

$$لا^{۴} + ۲ لا^{۳} - ۵ لا^{۲} + ۶ لا + ۲ = ۰$$

کی ایک اصل

$$-۲ + \sqrt{۳}$$

ہے دوسری اصلیں معلوم کرو۔ جواب: $-۲ \pm \sqrt{۳} ، ۱ + \sqrt{-۱}$

۴۔ مساوات

$$۳ لا^{۳} - ۴ لا^{۲} + لا + ۸۸ = ۰$$

کی ایک اصل ۲ + $\sqrt{-3}$ ہے۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب: ۔ ۲ ± $\sqrt{-3}$ ، $-\frac{3}{2}$

**۱۹ — ڈیکارٹ کا قانون علامت ۔ مثبت اصلیں** — اس قانون کو استعمال کرکے کسی دی ہوئی مساوات کا صرف معائنہ کرنے سے ہم اس کی مثبت اصلوں کی تعداد کے لئے ایک علوی حد مقرر کرسکتے ہیں - اس قانون کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مساوات کی سب رقموں کو دائیں جانب منتقل کرکے بائیں جانب صفر رکھا جائے تو اس کے پہلے رکن کی رقموں میں + سے - اور - سے + علامت کی جتنی تبدیلیاں ہونگی ان سے زیادہ مساوات کی مثبت اصلیں نہیں ہوسکتیں۔

ہم فی الحال صرف ایسے ثبوت پر اکتفا کرینگے جو عموماً دیا جاتا ہے۔ یہ ثبوت ڈیکارٹ کے اس مشہور مسئلہ کا عام ثبوت نہیں کہلایا جاسکتا بلکہ اس کو اس مسئلہ کی صرف تصدیق کہنا زیادہ بہتر ہوگا۔ آیندہ ہم یہ دکھائینگے کہ متذکرۂ بالا قانون اور دیگر مشابہ قوانین جو متقدمین نے مساواتوں کی مثبت، منفی اور خیالی اصلوں کی تعداد سے متعلق دریافت کئے ہیں در اصل بودن (Budan) اور فوریر (Fourier) کے عام مسئلوں سے فوری نتیجوں کے طور پر اخذ ہوئے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی کثیر رقمی کی علامتیں یکے بعد دیگرے ترتیب ذیل میں پیش ہوتی ہیں

$$- + - + + - - - + - + +$$

اس میں علامت کی تبدیلیاں کُل سات ہیں جس میں + سے - اور - سے + دونوں قسم کی تبدیلیاں شامل ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اگر اس کثیر رقمی کو ایک ثنائی جزو سے ضرب دیا جائے جس کی علامتیں ایک مثبت اصل کے جواب میں + - ہیں تو حاصل کثیر رقمی میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ابتدائی کثیر رقمی کے بہ نسبت کم از کم بقدر ایک کے زیادہ ہوگی۔ (29)

ہم صرف علامتوں کو لکھتے ہیں جو عمل ضرب میں واقع ہوتی ہیں۔ اس طرح

$$- + - + + - - - + - + +$$

$$+ - + - - + + + - + - -$$

$$+ - + - \pm + \mp \mp - + - \pm +$$

یہاں تیسری سطر میں جہاں کہیں دو مختلف العلامت رقموں کو جمع کرنا ہے وہاں مبہم علامت رکھی گئی ہے۔ اس صورت میں ہم دیکھتے ہیں (اور کسی دوسری ترتیب میں بھی یہی بات پیدا ہوگی) کہ عمل ضرب کا اثر یہ ہوتا ہے کہ مبہم علامت ایسی جگہ داخل ہوتی ہے جہاں ابتدائی کثیر رقمی میں + کے بعد + یا - کے بعد - علامت آتی ہے۔ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ہرگز نہیں گھٹتی۔ لیکن ہمیشہ ایک تبدیلی آخر میں ضرور پیدا ہوتی ہے۔ اوپر کی مثال میں جہاں ابتدائی کثیر رقمی علامت کی ایک تبدیلی پر ختم ہوتا ہے یہ نتیجہ ظاہر ہے۔ اگر کثیر رقمی ایک ہی علامت کی تکرار پر ختم ہو تو بھی یہ معلوم ہوگا کہ حاصل کثیر رقمی میں اس کے متناظر ابہام سے علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہوگا۔ یہ تبدیلی پچھلی علامت کے ساتھ ہوگی یا جمع شدہ زائد علامت کے ساتھ۔ پس ایسی نادر الوقوع صورت میں بھی جس میں ابتدائی کثیر رقمی میں علامت کی تکراروں سے حاصل کثیر رقمی میں علامت کی تکراریں باقی رہتی ہیں ایک تبدیلی جمع ہوتی ہے۔ پس ہم اب یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کثیر رقمی کو ثنائی جملہ لا - عہ سے ضرب دیا جائے تو کم از کم علامت کی ایک زائد تبدیلی داخل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ کثیر رقمی ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے بنا ہے جو منفی اور خیالی اصلوں کے جواب میں ہیں۔ مثبت اصلوں عہ، بہ، جہ وغیرہ کے متناظر اجزائے ضربی لا - عہ، لا - بہ، لا - جہ، وغیرہ میں سے ہر ایک سے اس کثیر رقمی کو ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ ہر ایک جزو ضربی کے جواب میں علامت کی کم سے کم ایک تبدیلی داخل ہوگی۔ اس طرح جب تمام اصلوں کے جواب میں مکمل حاصل ضرب ملجاتا ہے تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ حاصل کثیر رقمی میں

علامت کی کم ازکم اتنی تبدیلیاں موجود ہیں جتنی کہ اس کی مثبت اصلیں ہیں۔ یہی ڈیکارٹ کا مسئلہ ہے ۔

**۲۰ ـــ ڈیکارٹ کا قانون علامت ۔ منفی اصلیں ۔** منفی اصلوں کی صورت میں ڈیکارٹ کا قانون بیان کرنے سے پیشتر ہم ثابت کریں گے کہ اگر مساوات ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے ۔ لا مندرج کیا جائے تو حاصل مساوات کی اصلیں وہی ہونگی جو ابتدائی مساوات کی ہیں سوائے اس کے کہ ان کی علامتیں بدلجائیں گی ۔ دفعہ ۱۶ کی مساوات متماثلہ

ف (لا) = (لا - ع۱) (لا - ع۲) (لا - ع۳) ...... (لا - عن)

سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کیونکہ اس مساوات سے ہم اخذ کرتے ہیں

ف (- لا) = (-۱)^ن (لا + ع۱) (لا + ع۲) (لا + ع۳) ...... (لا + عن)

اس سے ظاہر ہے کہ ف (- لا) = ۰ کی اصلیں ہیں

- ع۱ ، - ع۲ ، - ع۳ ، ...... - عن

پس ف (لا) کی منفی اصلیں ف (- لا) کی مثبت اصلیں ہونگی اور ہم منفی اصلوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون اس طرح بیان کر سکتے ہیں ۔

مساوات ف (لا) = ۰ کی منفی اصلوں کی تعداد کثیر رقمی ف (- لا) کی رقموں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی ۔

## ۲۱ ـــ خیالی اصلوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے قانون کا استعمال

ڈیکارٹ کے قانون کے استعمال سے مساواتوں میں خیالی اصلوں کے وجود کا پتہ لگانا اکثر ممکن ہوگا ۔ کیونکہ اگر کسی مساوات کی مثبت اصلوں کی بڑی

سے بڑی ممکن تعداد اور منفی اصلوں کی بڑی سے بڑی ممکن تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ سے کم ہو تو خیالی اصلیں یقیناً موجود ہونگی - مثال کے طور پر مساوات

$$\text{لا}^{۶} + ۱۰\,\text{لا}^{۳} + \text{لا} - ۴ = ۰$$

لو - اس مساوات میں چونکہ علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس وجہ سے ایک سے زیادہ مثبت اصل نہیں ہو سکتی - اب لا کو - لا میں بدلنے سے حاصل ہوگا

$$\text{لا}^{۶} - ۱۰\,\text{لا}^{۳} - \text{لا} - ۴ = ۰$$

اب چونکہ اس میں علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس لئے منفی اصلوں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی - اس طرح مجوزہ مساوات میں دو سے زیادہ حقیقی
31 اصلیں موجود نہیں ہو سکتیں - اس لئے کم سے کم چھ خیالی اصلیں موجود ہونی چاہئیں - ڈیکارٹ کے قانون کا یہ استعمال صرف غیر مکمل مساواتوں کی صورت میں مفید ہے کیونکہ جب مساوات مکمل ہو تو بہ آسانی یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ف ( لا ) اور ف (-لا ) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ کے بالکل مساوی ہوتا ہے

۲۲ — **مسئلہ** — اگر کثیر رتنمی ف ( لا ) میں لا کی بجائے دو عدد ا اور ب مندرج کرنے سے نتیجے مختلف العلامت حاصل ہوں تو مساوات ف ( لا ) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی طاق تعداد ان عددوں کے درمیان واقع ہوگی - لیکن اگر نتیجے ہم علامت ہوں تو ان عددوں کے درمیان یا تو کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوگی یا حقیقی اصلوں کی جفت تعداد واقع ہوگی -

اس مسئلہ میں اُن نتیجوں کی عام سے عام صورت شامل ہے جو کسی مساوات کے پہلے رکن کی علامتوں سے مساوات کی اصلوں کے متعلق اخذ کئے جا سکتے ہیں جبکہ لا کی بجائے دو دئے ہوئے عدد مندرج کئے جائیں، چنانچہ دفعہ ۱۲ کا مسئلہ اس کی ایک خاص صورت ہے - ہم اس مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت کریں گے - دوسرے حصہ کو بالکل اسی طریقہ پر ثابت کیا جا سکتا ہے -

فرض کرو کہ مقادیر ا اور ب کے درمیان مساوات ف ( لا ) = ۰ کی م اصلیں ع۱، ع۲، ..... عم واقع ہوتی ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور اصلیں واقع نہیں ہوتیں - فرض کرو کہ ا چھوٹا ہے ب سے

فرض کرو کہ جب ف (لا) کو ہم اجزائے ضربی کے حاصل ضرب (لا - ع$_1$) (لا - ع$_2$) ...... (لا - ع$_م$) سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت فہ (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو مساوات متماثلہ ملیگی

ف (لا) = (لا - ع$_1$) (لا - ع$_2$) ...... (لا - ع$_م$) فہ (لا)

اس میں یکے بعد دیگرے لا = ا ، لا = ب رکھنے سے حاصل ہوگا

ف (ا) = (ا - ع$_1$) (ا - ع$_2$) ...... (ا - ع$_م$) فہ (ا)

ف (ب) = (ب - ع$_1$) (ب - ع$_2$) ...... (ب - ع$_م$) فہ (ب)

اب فہ (ا) اور فہ (ب) ہم علامت ہیں، کیونکہ اگر ان کی علامتیں مختلف ہوتیں تو دفعہ ۱۲ کی رو سے ان کے درمیان مساوات فہ (لا) = ۰ کی کم سے کم ایک اصل ہوتی۔ بموجب فرض ف (ا) اور ف (ب) کی علامتیں مختلف ہیں اس لئے حاصل ضربوں

(ا - ع$_1$) (ا - ع$_2$) ...... (ا - ع$_م$)،

(ب - ع$_1$) (ب - ع$_2$) ...... (ب - ع$_م$)

کی علامتیں مختلف ہیں۔ لیکن دوسرے کی علامت مثبت ہے کیونکہ اس کے تمام 32
اجزا مثبت ہیں۔ پس پہلے کی علامت منفی ہے لیکن اس کے تمام اجزا منفی ہیں۔ اس لئے ان کی تعداد طاق ہونی چاہیئے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ میں یہ یاد رہے کہ ضعفی اصلوں کو اتنی مرتبہ شمار کیا گیا ہے جتنی مرتبہ وہ تکراری ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ پر ترسیمی طریقہ کا استعمال کرنا فائدہ بخش ہوگا۔ اس نقطۂ نظر سے اس مسئلہ کی صداقت خود واضح ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب کسی دو نقطوں کو ایک منحنی سے ملایا جاتا ہے تو ان نقطوں کے درمیان منحنی کا حصہ محور لا کو طاق مرتبہ قطع کرتا ہے جبکہ نقطے محور کی مخالف سمتوں میں ہوں اور جفت مرتبہ قطع کرتا ہے

یا بالکل قطع نہیں کرتا جب کہ نقطے محور کی ایک ہی جانب واقع ہوں۔

# مثالیں

۱۔ اگر ایک مساوات کی سب رقموں کی علامتیں مثبت ہوں تو کوئی مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔

۲۔ اگر کسی مکمل مساوات کی رقموں کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو کوئی اصل منفی نہیں ہو سکتی۔

۳۔ اگر ایک مساوات کی پہلی چند رقموں کی علامتیں مثبت ہوں اور ان کے بعد آنے والی رقموں کی علامتیں منفی تو صرف ایک اصل مثبت ہوگی اور اس سے زیادہ نہیں۔

دفعہ ۱۲ استعمال کرو اور صفر اور ∞ کا اندراج کرو۔ دفعہ ۱۹ بھی استعمال کرو۔

۴۔ اگر ایک مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو کوئی حقیقی اصل نہیں ہو سکتی۔

دفعات ۱۹ اور ۲۰ کا استعمال کرو۔

۵۔ اگر ایک مساوات میں لا کی صرف طاق قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو صفر اصل کے سوا کوئی حقیقی اصل نہ ہوگی۔

۶۔ اگر ایک مساوات مکمل ہو تو ف (لا) میں علامت کی تکراروں کی تعداد ف (-لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔

۷۔ اگر ایک مکمل مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی اور منفی اصلوں کی تعداد علامت کی تکراروں کی تعداد کے مساوی۔

۸۔ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو اس کی آخری رقم کی علامت مثبت ہونی چاہیئے اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو اس کی آخری رقم منفی ہونی چاہیئے۔

لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر مثبت لو (دیکھو دفعہ ۱۴)۔

۹۔ مثال ۸ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس جفت عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے جفت عدد کے مساوی۔ اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس طاق عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے طاق عدد کے مساوی۔ دوسرے الفاظ میں مثبت

اصلوں کی تعداد جب تبدیلیوں کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ان سے جفت عدد کا فرق رکھتی ہے۔ صفر اور ∞ کا اندراج کرو اور دفعہ ۲۲ استعمال کرو۔

۱۰۔ مساوات

$$\text{لا}^{6} - 3\,\text{لا}^{2} - \text{لا} + 1 = 0$$

میں خیالی اصلوں کی تعداد کی سفلی حد معلوم کرو۔

**جواب:۔** کم از کم دو خیالی اصلیں

۱۱۔ مساوات

$$\text{لا}^{4} + 15\,\text{لا}^{2} + 7\,\text{لا} - 11 = 0$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔ دفعات ۱۴، ۱۹، ۲۰ استعمال کرو۔

**جواب:۔** ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{3} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

کی ایک اصل منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{3} - \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

کی ایک اصل منفی ہے اور باقی دو اصلیں خیالی ہیں یا دونوں مثبت جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں

۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{ا}^{2}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{ب}^{2}}{\text{لا} - \text{ب}} + \frac{\text{ج}^{2}}{\text{لا} - \text{ج}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ل}^{2}}{\text{لا} - \text{ل}} = \text{لا} - \text{م}$$

کی اصل خیالی نہیں ہو سکتی جہاں ا، ب، ج، ...... ل سب کے سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

لا کی بجائے علی الترتیب $\text{ع} + \text{ہ}\sqrt{-1}$ اور $\text{ع} - \text{ہ}\sqrt{-1}$ درج کرو اور پھر تفریق کرو تو ایسا جملہ ملیگا جو صرف $\text{ہ} = 0$ یعنے پر معدوم ہو سکتا ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$$

کی صرف دو حقیقی اصلیں ۱ اور ۱- ہیں اور ان کے علاوہ اور کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو اُس مساوات کی صرف ایک حقیقی اصل ۱- ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے' یہ اور سوال ۱۶ دفعات ۱۹ اور ۲۰ سے اخذ ہو سکتے ہیں۔

۱۶ــــ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = ۰$$

کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو صرف ایک حقیقی اصل ۱- ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔

۱۷ــــ مساوات

$$\text{لا}^{۴} + ۲\,\text{ق}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ق}^{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{ق}^{۳}\,\text{لا} - \text{ر}^{۴} = ۰$$

کو حل کرو۔

یہ مساوات شکل

$$(\text{لا}^{۲} + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ق}^{۲})^{۲} - \text{ق}^{۴} - \text{ر}^{۴} = ۰$$

میں لکھی جا سکتی ہے۔

جواب:- $-\frac{۱}{۲}\text{ق} + \sqrt{-\frac{۳}{۴}\text{ق}^{۲} + \sqrt{\text{ق}^{۴} + \text{ر}^{۴}}}$

جذروں کی علامتوں سے چار اجتماع حاصل ہوتے ہیں اور جملہ بالا میں چار اصلیں شامل ہیں۔

۱۸ــــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

34 $$۲ + \text{ط}\sqrt{۷} + \sqrt{۱۱ + \text{ط}\sqrt{۷}}$$

کی چار مختلف قیمتیں ہوں جہاں $\text{ط}^{۲} = -۱$۔

اگر ط کے ادخال سے کوئی قید عائد نہ کیجاتی تو اس جملہ کی ۸ قیمتیں ہوتیں یہاں $\sqrt{۷}$ کو دوسرے جذر کے اندر اور اس کے باہر دونوں جگہ ایک ہی علامت کے ساتھ لینا چاہیئے۔ اس لئے کل چار قیمتیں ملتی ہیں۔

جواب:- $\text{لا}^{۴} - ۸\,\text{لا}^{۳} - ۱۲\,\text{لا}^{۲} + ۸۴\,\text{لا} - ۶۳ = ۰$

۱۹ــــ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$-۹ + ط\sqrt{۱۳۷} + ۳\sqrt{۳۴ - ۲ط\sqrt{۱۳۷}}$$

کی چار قیمتیں ہوں جہاں $ط^۲ = -۱$

جواب:- $لا^۴ + ۳۶\,لا^۳ - ۴۰۰\,لا^۲ - ۳۱۶۸\,لا + ۷۷۴۴ = ۰$

۲۰۔ منطق سروں والی ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

$$ط_۱\sqrt{پ} + ط_۲\sqrt{ق} + ط_۳\sqrt{ر}$$

کی تمام قیمتیں ہوں جہاں

$$ط_۱^۲ = ۱،\ ط_۲^۲ = ۱،\ ط_۳^۲ = ۱$$

اس جملہ کی کل ۸ مختلف قیمتیں ہیں یعنی

$$\sqrt{پ} + \sqrt{ق} + \sqrt{ر}،\qquad -\sqrt{پ} - \sqrt{ق} - \sqrt{ر}$$

$$\sqrt{پ} - \sqrt{ق} - \sqrt{ر}،\qquad -\sqrt{پ} + \sqrt{ق} + \sqrt{ر}$$

$$-\sqrt{پ} + \sqrt{ق} - \sqrt{ر}،\qquad \sqrt{پ} - \sqrt{ق} + \sqrt{ر}$$

$$-\sqrt{پ} - \sqrt{ق} + \sqrt{ر}،\qquad \sqrt{پ} + \sqrt{ق} - \sqrt{ر}$$

فرض کرو کہ

$$لا = ط_۱\sqrt{پ} + ط_۲\sqrt{ق} + ط_۳\sqrt{ر}$$

مربع لینے سے

$$لا^۲ = پ + ق + ر + ۲\left(ط_۲ط_۳\sqrt{ق\,ر} + ط_۳ط_۱\sqrt{ر\,پ} + ط_۱ط_۲\sqrt{پ\,ق}\right)$$

ارقام کو منتقل کرنے اور پھر مربع لینے سے

$$\left(لا^۲ - پ - ق - ر\right)^۲ = ۴\left(ق\,ر + ر\,پ + پ\,ق\right)$$
$$+ ۸\,ط_۱ط_۲ط_۳\sqrt{پ\,ق\,ر}\left(ط_۱\sqrt{پ} + ط_۲\sqrt{ق} + ط_۳\sqrt{ر}\right)$$

ارقام کو منتقل کرنے، $ط_{۱}\sqrt{پ} + ط_{۲}\sqrt{ق} + ط_{۳}\sqrt{ر}$ کی بجائے لا درج کرنے اور مربع لینے سے بالآخر ہمیں مساوات ملتی ہے

$$\{لا^{۴} - ۲لا^{۲}(پ + ق + ر) + پ^{۲} + ق + ر^{۲} - ۲ر پ - ۲پ ق\}^{۲}$$

$$= ۶۴ پ ق ر لا^{۲}$$

جو جذر کی علامتوں سے آزاد ہے۔

یہ آٹھ درجی مساوات ہے جس کی اصلیں وہ ہیں جو اوپر لکھی گئی ہیں۔

چونکہ $ط_{۱}$، $ط_{۲}$، $ط_{۳}$ غائب ہو چکے ہیں اس لئے ۸ اصلوں $\pm\sqrt{پ} \pm\sqrt{ق} \pm\sqrt{ر}$ میں سے کسی کو لا کے مساوی فرض کیا جاسکتا ہے۔ محصلہ مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ لا میں سے ہر اصل کو تفریق کیا جائے اور پھر ان کو مسلسل ضرب دیا جائے جس طرح دفعہ ۱۶ کی مثال ۶ میں کیا گیا تھا۔

# تیسرا باب 35

## مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان روابط اور اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال

۲۳ — اصلوں اور سروں کے درمیان روابط — لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک لینے سے اور دفعہ ۱۶ کی طرح مساوات کی ن اصلوں کو $\text{ع}_{۱}$، $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۳}$ ....... $\text{ع}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرنے سے مساوات متماثلہ ملیگی

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ب}_{۳}\,\text{لا}^{\text{ن}-۳} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\equiv (\text{لا} - \text{ع}_{۱})(\text{لا} - \text{ع}_{۲})(\text{لا} - \text{ع}_{۳}) \ldots\ldots (\text{لا} - \text{ع}_{\text{ن}})$$

اس متماثلہ کے دوسرے رکن کے اجزا کو باہم ضرب دو۔ حاصل ضرب میں لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم $\text{لا}^{\text{ن}}$ ہے $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کا سر ان مقداروں — $\text{ع}_{۱}$، — $\text{ع}_{۲}$ وغیرہ کا مجموعہ ہے یعنی اصلوں کا مجموعہ جبکہ ان کی علامتیں بدل دی گئی ہوں $\text{لا}^{\text{ن}-۲}$ کا سر ان مقداروں میں سے دو دو کے حاصلضربوں کا مجموعہ ہے $\text{لا}^{\text{ن}-۳}$ کا سر ان مقداروں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے علیٰ ہذا القیاس اور آخری رقم تمام اصلوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ انکی علامتیں بدل دی گئی ہوں۔ اس لئے مساوات متماثلہ (۱) میں طرفین کی متناظر ارقام

کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا

$$
\left.\begin{aligned}
ب_1 &= -(ع_1 + ع_2 + ع_3 + \cdots + ع_ن) \\
ب_2 &= (ع_1ع_2 + ع_1ع_3 + ع_2ع_3 + ع_3ع_4 + \cdots + ع_{ن-1}ع_ن) \\
ب_3 &= -(ع_1ع_2ع_3 + ع_1ع_3ع_4 + \cdots + ع_{ن-2}ع_{ن-1}ع_ن) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
ب_ن &= (-1)^ن ع_1ع_2ع_3 \cdots\cdots ع_{ن-1}ع_ن
\end{aligned}\right\} \cdots (۲)
$$

ان کی مدد سے ہم اصلوں اور سروں کے درمیان جو روابط ہیں اُن کو حسب ذیل 36
طریقہ پر بیان کرسکتے ہیں۔

**مسئلہ** — ہر جبری مساوات میں جس کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو دوسری رقم کا سر $ب_1$ بہ تبدیل علامت اس کی اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

تیسری رقم کا سر $ب_2$، اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

چوتھی رقم کا سر $ب_3$ بہ تبدیل علامت اصلوں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ علیٰ ہذالقیاس۔ سروں کی علامتیں باری باری سے منفی اور مثبت بدلتی ہیں اور باہم ضرب کھانے والی اصلوں کی تعداد اصلوں کے متناظر تفاعل کی ہر رقم میں بقدر ایک کے بڑھتی ہے یہاں تک کہ ہم اس تفاعل پر پہنچیں جو ن اصلوں کا حاصل ضرب ہے۔

اگر لا$^ن$ کا سر $ا_0$ ایک نہ ہو (دیکھو دفعہ ا) تو مساوات کی ہر رقم کو اس سے تقسیم کرنا چاہیئے۔ اس صورت میں اصلوں کا مجموعہ $-\frac{ا_1}{ا_0}$ کے مساوی ہوگا اور ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{ا_2}{ا_0}$ کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذالقیاس۔

نتیجہ صریح (۱) مساوات کی ہر اصل اس کی مطلق رقم کا ایک مقسوم علیہ ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲) اگر مساوات کی سب اصلیں مثبت ہوں تو سر (بشمول لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کے سر کے) باری باری سے مثبت اور منفی ہونگے۔ اور اگر سب اصلیں منفی ہوں تو سب سر مثبت ہونگے۔ یہ بات مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے۔
[دیکھو دفعات ۱۹ اور ۲۰]

۴۲۔ مسئلہ بالا کے اطلاقات۔ دفعہ ماسبق کی مساواتوں (۲) سے چونکہ سروں اور ن اصلوں کے درمیان جدا جدا ان ربط ملتے ہیں اس لئے ممکن ہے یہ خیال پیدا ہو کہ مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں اس سے کوئی فائدہ ہوگا۔ درحقیقت یہ بات نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ان مساواتوں کی مدد سے ہم ابتدائی مساوات کی ایک اصل ع۱ حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ اسیوقت ممکن ہے جبکہ دی ہوئی مساواتوں کی مدد سے دوسری اصلوں کو ساقط کیا جائے اور بالآخر وہ مساوات حاصل کی جائے جس کی ایک اصل ع۱ ہے۔

اب خواہ کسی طریقہ سے یہ آخری مساوات حاصل ہو اس میں اصل ع۱ کے 37
علاوہ دوسری اصلیں ع۲، ع۳، ... عن بھی موجود ہونگی اور ع۱ کے دریافت کرنے میں ان کو بھی دریافت کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مساواتوں (۲) میں سب کی سب اصلیں ایک ہی طریقہ سے داخل ہوتی ہیں اور اس لئے اگر باقی دوسری اصلوں کو ساقط کرکے ع۲ کا معلوم کرنا مقصود ہو (یا کسی دوسری اصل کا) تو ہم ایسی مساوات پر پہنچینگے جو ع۱ کے لئے حاصل شدہ مساوات سے صرف اس قدر فرق رکھیگی کہ اصل ع۱ کے بجائے اصل ع۲ (یا وہ دوسری اصل) موجود ہوگی۔ اسلئے عمل اسقاط سے ہمیں ایسی مساوات ملیگی جس کی ن اصلیں ع۱، ع۲، ... عن ہونی چاہئیں اور اسلئے ایسی مساوات کا حل کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا کہ دی ہوئی مساوات کا۔ یہ آخری مساوات فی الحقیقت ابتدائی مساوات ہے جس میں مطلوبہ اصل لا کی

بجائے واقع ہوتی ہے۔ چنانچہ ہم کعبی مساوات کی صورت لیکر اس بات کو ثابت کرینگے۔ طریق عمل بالکل عام ہوگا اور اس لئے کسی درجہ کی مساوات پر جاری کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{۳} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا} + \text{ب}_{۳} = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

دفعہ ۲۲ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ب}_{۱} = -(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ})$$

$$\text{ب}_{۲} = \text{عہ بہ} + \text{بہ جہ} + \text{جہ عہ}$$

$$\text{ب}_{۳} = -\,\text{عہ بہ جہ}$$

ان میں سے پہلی مساوات کو $\text{عہ}^{۲}$ سے اور دوسری کو عہ سے ضرب دو اور تینوں کو جمع کرو تو

$$\text{ب}_{۱}\,\text{عہ}^{۲} + \text{ب}_{۲}\,\text{عہ} + \text{ب}_{۳} = -\,\text{عہ}^{۳}$$

یا

$$\text{عہ}^{۳} + \text{ب}_{۱}\,\text{عہ}^{۲} + \text{ب}_{۲}\,\text{عہ} + \text{ب}_{۳} = ۰$$

جو دی ہوئی کعبی مساوات ہے جس میں لا کی بجائے عہ ہے۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی نتیجہ کو ثابت کرنے کے لئے درجہ چہارم کی مساوات لے سکتا ہے۔ عام صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دفعہ ۲۲ کی مساواتوں کو علی الترتیب $\text{عہ}^{\text{ن}-۱}$، $\text{عہ}^{\text{ن}-۲}$، ..... سے ضرب دیکر انکو جمع کیا جائے۔

اگرچہ مساواتوں (۲) سے مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اکثر عددی مساواتوں کا حل معلوم کرتے وقت ان سے سہولت پیدا ہوتی ہے جبکہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص ربط دئے گئے ہوں۔
(38) ان کو وہ رشتے معلوم کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو سروں کے درمیان ہونے چاہئیں جبکہ اصلوں کے درمیان رشتے دئے گئے ہوں۔

# مثالیں

۱ ـــ مساوات

لا$^{۳}$ − ۵ لا$^{۲}$ − ۱۶ لا + ۸۰ = ۰

کو حل کرو جبکہ اس کی دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بہ، جہ، ہیں تو

عہ + بہ + جہ = ۵

عہ بہ + عہ جہ + بہ جہ = −۱۶

عہ بہ جہ = −۸۰

بہ + جہ = ۰ لینے سے ان میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا عہ = ۵،
اور پھر دوسری یا تیسری مساوات سے حاصل ہوگا بہ جہ = −۱۶ ۔ اس طرح بہ اور جہ
کی قیمتیں حاصل ہونگی ۴ اور −۴۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۵، ۴، −۴ ہیں –

۲ ـــ مساوات

لا$^{۳}$ − ۳ لا$^{۲}$ + ۴ = ۰

کو جس کی دو اصلیں مساوی ہیں حل کرو –

فرض کرو کہ اس کی تین اصلیں عہ، عہ، بہ ہیں تو

۲ عہ + بہ = ۳

عہ$^{۲}$ + ۲ عہ بہ = ۰

جن سے عہ = ۲، بہ = −۱ حاصل ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۲، ۲، −۱ ہیں۔

۳ ـــ مساوات

لا$^{۴}$ + ۴ لا$^{۳}$ − ۲ لا$^{۲}$ − ۱۲ لا + ۹ = ۰

میں مساوی اصلوں کے دو زوج ہیں – اُنہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، بہ، بہ ہیں تو

۲ عہ + ۲ بہ = −۴

عہ$^{۲}$ + بہ$^{۲}$ + ۴ عہ بہ = −۲

اِن سے عہ اور بہ کی قیمتیں ۱ اور -۳ حاصل ہونگی۔

۴ — مساوات

لا^۳ - ۹لا^۲ + ۱۴لا + ۲۴ = ۰

کو جس کی دو اصلیں ۳ اور ۲ کی نسبت رکھتی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں اور ۲ عہ = ۳ بہ تو عہ کے اسقاط سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

۵ بہ + ۲ جہ = ۱۸

۳ بہ^۲ + ۵ بہ جہ = ۲۸

(39) اِن مساواتوں سے ہمیں بہ میں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

۱۹ بہ^۲ - ۹۰ بہ + ۵۶ = ۰

اس کی اصلیں ۴ اور ۱۴/۱۹ ہیں۔ پہلی اصل سے عہ اور جہ کی قیمتیں ۶ اور -۱ حاصل ہونگی۔ اسلئے مطلوبہ اصلیں ۶، ۴، -۱ ہیں۔

طالب علم یہاں پوچھیگا کہ بہ کی قیمت ۱۴/۱۹ کا کیا مطلب ہے۔ گذشتہ مثالوں میں بھی یہ دقت پیش آئی ہوگی۔ لیکن یہ معلوم رہے کہ اس نوعیت کی مثالوں میں مطلوبہ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اصلوں اور سروں کے درمیان تمام روابط کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دی ہوئی شرط سے اصلوں کے درمیان ایک یا زیادہ ربط قائم ہو جاتے ہیں۔ جب کبھی یہ صورت پیدا ہو کہ اثنائے عمل میں استعمال ہونے والی مساواتوں سے اصلوں کے لئے قیمتوں کے ایک نظام سے زیادہ نظام حاصل ہوں تو اصلی اصلیں اس شرط کی مدد سے معلوم ہو سکتی ہیں کہ وہ اُس مساوات (یا ان مساواتوں) کو پورا کرتی ہیں جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں اور جن کا استعمال ان اصلوں کو معلوم کرتے وقت نہیں کیا گیا ہے۔ مثلاً موجودہ مثال میں قیمت بہ = ۴ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو متروکہ مساوات

عہ بہ جہ = -۲۴

کو پورا کرتا ہے۔ قیمت بہ = ۱۴/۱۹ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو اس مساوات کو

پورا نہیں کرتا اور اسلئے مسترد کردیا گیا ہے۔

۵ — مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۹\,\text{لا}^{۲} + ۲۳\,\text{لا} - ۱۵ = ۰$$

کو جس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ − ضہ، عہ، عہ + ضہ ہیں تو

$$۳\,\text{عہ} = ۹\,،$$

$$۳\,\text{عہ}^{۲} - \text{ضہ}^{۲} = ۲۳$$

جن سے ہمیں تین اصلیں ۱، ۳، ۵ حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$\text{لا}^{۴} + ۲\,\text{لا}^{۳} - ۲۱\,\text{لا}^{۲} - ۲۲\,\text{لا} + ۴۰ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ − ۳ ضہ، عہ − ضہ، عہ + ضہ، عہ + ۳ ضہ ہیں۔

جواب :- −۵، −۲، ۱، ۴

۷ — مساوات

$$۲۷\,\text{لا}^{۳} + ۴۲\,\text{لا}^{۲} - ۲۸\,\text{لا} - ۸ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ ر، عہ، $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے تیسری مساوات سے ہمیں $\text{عہ}^{۳} = \frac{۸}{۲۷}$ یا $\text{عہ} = \frac{۲}{۳}$ حاصل ہوگا اور پھر پہلی یا دوسری مساوات سے ر میں درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

جواب :- −۲، $\frac{۲}{۳}$، $-\frac{۲}{۹}$

۸ — مساوات (40)

$$۳\,\text{لا}^{۴} - ۴۰\,\text{لا}^{۳} + ۱۳۰\,\text{لا}^{۲} - ۱۲۰\,\text{لا} + ۲۷ = ۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}^{۳}}$، $\frac{\text{عہ}}{\text{ر}}$، عہ ر، $\text{عہ ر}^{۳}$ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے دوسری اور چوتھی مساوات استعمال کرو۔

جواب :- $\frac{۱}{۳}$ ، ۱ ، ۳ ، ۹

۹ —— مساوات

لا$^{۴}$ + ۱۵ لا$^{۳}$ + ۷۰ لا$^{۲}$ + ۱۲۰ لا + ۶۴ = ۰

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو۔

جواب :- -۱ ، -۲ ، -۴ ، -۸

۱۰ —— مساوات

۶ لا$^{۳}$ - ۱۱ لا$^{۲}$ + ۶ لا - ۱ = ۰

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں تو ہمیں ربط ملیگا

$$\frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{جہ} = \frac{۲}{بہ}$$

پس بہ جہ + جہ عہ + عہ بہ = ۳ جہ عہ ، وغیرہ

جواب : ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$

۱۱ —— مساوات

۸۱ لا$^{۳}$ - ۱۸ لا$^{۲}$ - ۳۶ لا + ۸ = ۰

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

جواب :- $\frac{۲}{۹}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، -$\frac{۲}{۳}$

۱۲ —— اگر مساوات

لا$^{۳}$ - ف لا$^{۲}$ + ق لا - ر = ۰

کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اوسط اصل $\frac{۳ ر}{ق}$ ہے۔

۱۳ —— مساوات

لا$^{۴}$ - ۲ لا$^{۳}$ + ۴ لا$^{۲}$ + ۶ لا - ۲۱ = ۰

کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔

عہ + بہ = ۰ لو اور دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی اور تیسری مساوات استعمال کرو۔

جواب: $\sqrt{۳}$ ، $-\sqrt{۳}$ ، ۱ ± $\sqrt{-۶}$

۱۴ — مساوات

۳ لا$^{۴}$ - ۲۵ لا$^{۳}$ + ۵۰ لا$^{۲}$ - ۵۰ لا + ۱۲ = ۰

کی دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ ہے۔ سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب: ۶ ، $\frac{۱}{۳}$ ، ۱ ± $\sqrt{-۱}$

۱۵ — کعبی مساوات

لا$^{۳}$ - ف لا$^{۲}$ + ق لا - ر = ۰

کی ایک اصل دوسری کا دوچند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی اصل کو ایک مساوات درجہ دوم سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات (41)

لا$^{ن}$ + ب$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ب$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + .... + ب$_{ن-۱}$ لا + ب$_{ن}$ = ۰

کی سب اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں اگر وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ + ضہ، عہ + ۲ ضہ، ....، عہ + (ن - ۱) ضہ ہیں تو مساواتوں (۲) میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا

- ب$_{۱}$ = ن عہ + {۱ + ۲ + ۳ + .... + (ن - ۱)} ضہ

= ن عہ + $\frac{\text{ن (ن - ۱)}}{۲}$ ضہ .......... (۱)

پھر چونکہ مقداروں کی کسی تعداد کے مربعوں کا مجموعہ = ان مقداروں کے مجموعہ کا مربع منفی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کا دوچند، اسلئے

ب$_{۱}^{۲}$ - ۲ ب$_{۲}$ = عہ$^{۲}$ + (عہ + ضہ)$^{۲}$ + (عہ + ۲ ضہ)$^{۲}$ + ........

= ن عہ$^{۲}$ + ن (ن - ۱) عہ ضہ + $\frac{\text{ن (ن - ۱) (۲ن - ۱)}}{۶}$ ضہ$^{۲}$

.............. (۲)

(۱) کے مُربع کو (۲) کے ن گُنے میں سے تفریق کرو تو ضہ$^{۲}$، ب$_{۱}$ اور ب$_{۲}$ کی رُقوم میں

ملجائیگا۔ پھر ہم مساوات (۱) سے عہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح تمام اصلوں کو سروں ب$_1$ اور ب$_2$ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۱۷ — وہ شرط معلوم کرو جو مساوات

لا$^3$ − ف لا$^2$ + ق لا − ر = ۰

کے سروں سے پوری ہونی چاہیئے اگر اس کی دو اصلوں عہ، بہ میں ربط عہ + بہ = ۰ موجود ہو۔

جواب:- ف ق − ر = ۰.

۱۸ — وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی مساوات

لا$^3$ − ف لا$^2$ + ق لا − ر = ۰.

کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

جواب:- ف$^3$ ر − ق$^3$ = ۰.

۱۹ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

(دیکھو مثال ۱۲) جواب:- ۲۷ ر$^2$ − ۹ ف ق ر + ۲ ق$^3$ = ۰.

۲۰ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

لا$^4$ + ف لا$^3$ + ق لا$^2$ + ر لا + س = ۰.

کی دو اصلوں میں ربط عہ + بہ = ۰ موجود ہو اور اس صورت میں درجہ دوم کی دو مساواتیں معلوم کرو جنکی اصلیں (۱) عہ، بہ اور (۲) جہ، دہ ہوں۔

جواب:- ف ق ر − ق$^2$ س − ر$^2$ = ۰،

(۱) ف لا$^2$ + ر = ۰،

(۲) لا$^2$ + ف لا + $\frac{\text{ف س}}{\text{ر}}$ = ۰.

۲۱ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلوں میں ربط بہ + جہ = عہ + دہ موجود ہو۔

جواب:- ف$^3$ − ۴ ف ق + ۸ ر = ۰.

۲۲ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

لا$^4$ + ف لا$^3$ + ق لا$^2$ + ر لا + س = ۰.

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں ربط عہ بہ = جہ ضہ موجود ہو۔

جواب:- $\text{ف}^{۲}\,\text{س} - \text{ر}^{۲} = ۰$

۲۳ — ثابت کرو کہ سوال ۲۲ میں حاصل شدہ شرط اسوقت بھی پوری ہوتی ہے جبکہ درجہ چہارم کی مساوات کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

(42)

## ۲۵ ۔ مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں کوئی ربط موجود ہو۔

ہم نے دفعہ ماسبق کی مثالوں میں یہ دیکھا ہے کہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص روابط موجود ہوں تو ان کو متعین کرنے میں سروں اور اصلوں کو ملانیوالی مساواتوں کا کیا فائدہ ہے۔ اب ہم عام صورت میں یہ ثابت کرینگے کہ

**اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں میں سے دو کے درمیان بہ = فہ (عہ) کی شکل کا ربط موجود ہو تو مساوات کا درجہ بقدر ۲ کے گھٹایا جا سکتا ہے۔**

فرض کرو کہ مساوات متماثلہ

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{ا}_{.}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

میں لا کی بجائے فہ (لا) مندرج کیا گیا ہے تو

$$\text{ف}\{\text{فہ}(\text{لا})\} \equiv \text{ا}_{.}\{\text{فہ}(\text{لا})\}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\{\text{فہ}(\text{لا})\}^{\text{ن}-۱} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$$

اس مساوات متماثلہ کے دوسرے رکن کو ہم سہولت کی خاطر فا (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب لا کی بجائے عہ مندرج کرنے سے

$$\text{فا}(\text{عہ}) \equiv \text{ف}\{\text{فہ}(\text{عہ})\} \equiv \text{ف}(\text{بہ}) = ۰$$

پس مساوات فا (لا) = ۰ کو عہ پورا کرتا ہے اور یہ ف (لا) = ۰ کو بھی

پورا کرتا ہے۔ اس لئے کثیرالارقام ف (لا) اور فا (لا) کا جزو مشترک لا - عہ ہے اس طرح عہ معلوم ہو سکتا ہے اور اس سے فہ (عہ) یا بہ معلوم ہو جاتا ہے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے درجہ کو بقدر ۲ کے گھٹایا جا سکتا ہے۔

## مثالیں

۱ — مساوات

لا$^{۳}$ - ۵ لا$^{۲}$ - ۴ لا + ۲۰ = ۰

کی دو اصلوں میں فرق = ۳ - انہیں معلوم کرو۔

یہاں بہ - عہ = ۳، بہ = ۳ + عہ۔ دئے ہوئے کثیرالارقام ف (لا) میں لا کی بجائے لا + ۳ مندرج کرو تو یہ کثیرالارقام لا$^{۳}$ + ۴ لا$^{۲}$ - ۷ لا - ۱۰ ہو جائیگا۔ اس کا اور ف (لا) کا جزو مشترک لا - ۲ ہے جس سے عہ = ۲، بہ = ۵ حاصل ہوگا۔ تیسری اصل -۲ ہے۔

۲ — مساوات

لا$^{۴}$ - ۵ لا$^{۳}$ + ۱۱ لا$^{۲}$ - ۱۳ لا + ۶ = ۰

کی دو اصلوں میں ربط ۲ بہ + ۳ عہ = ۷ موجود ہے۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱، ۲، ۱ ± $\sqrt{-۲}$

یہاں یہ بات واضح رہے کہ جب دو کثیرالارقام ف (لا) اور فا (لا) میں مشترک اجزائے ضربی ہوں تو یہ اجزائے ضربی مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے کے معمولی طریقہ سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ دو دی ہوئی مساواتوں میں مشترک اصلیں موجود ہیں تو دے ہوے کثیرالارقاموں کے مقسوم علیہ اعظم
(43) کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہم ان اصلوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

## مثالیں

۱ — مساواتوں

$$\text{۲ لا}^{۳} + \text{۵ لا}^{۲} - \text{۶ لا} - ۹ = ۰$$

$$\text{۳ لا}^{۳} + \text{۷ لا}^{۲} - \text{۱۱ لا} - ۱۵ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں - اِنکو معلوم کرو -

جواب :- $-۱$ ، $-۳$

۲ —— مساواتوں

$$\text{لا}^{۳} + \text{ف لا}^{۲} + \text{ق لا} + \text{ر} = ۰$$

$$\text{لا}^{۳} + \text{فَ لا}^{۲} + \text{قَ لا} + \text{رَ} = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں - وہ دو درجی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں یہ اصلیں ہوں - ہر مساوات کی تیسری اصل بھی دریافت کرو -

جواب :- $\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ق} - \text{قَ}}{\text{ف} - \text{فَ}}\text{لا} + \frac{\text{ر} - \text{رَ}}{\text{ف} - \text{فَ}} = ۰$ ، $\frac{-\text{ر}(\text{ف} - \text{فَ})}{\text{ر} - \text{رَ}}$ ، $\frac{-\text{رَ}(\text{ف} - \text{فَ})}{\text{ر} - \text{رَ}}$

## ۲۶ ـ اکائی کے جذر الکعب -

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰ \text{ ، } \text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = ۰$$

کی شکل کی مساواتوں کو جنمیں صرف بڑی سے بڑی قوت والی رقم اور مطلق رقم شامل ہوں ہم **ثنائی مساواتیں** کہینگے - قبل الذکر مساوات کی اصلوں کو ہم **اکائی کے ن ویں جذر** کہینگے - اگلے باب میں اِن شکلوں پر بحث کیجائیگی - فی الحال ہم ثنائی کعبی مساوات کی سادہ صورت پر اکتفا کرتے ہیں جس کے لئے اصلوں کی بعض سود مند خواص بہ آسانی ثابت کئے جا سکتے ہیں - دفعہ ۱۶ مثال ۵ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ کعبی مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۱ = ۰$$

کی اصلیں حسب ذیل ہیں

$$۱ ،\quad -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳} ،\quad -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}$$

اِن خیالی اصلوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم سہ سے تعبیر کریں تو دوسری
خیالی اصل سہ$^{۲}$ ہو جائیگی - مربع لینے سے یہ بات ظاہر ہے یا اس کو ہم اسطرح
بھی ثابت کر سکتے ہیں :-

اگر کعبی کی ایک اصل سہ ہو تو سہ$^{۲}$ بھی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ
سہ$^{۳}$ = ۱ اس لئے مربع لینے سے سہ$^{۶}$ = ۱ یعنے (سہ$^{۲}$)$^{۳}$ = ۱ ، اس طرح سہ$^{۲}$
بھی کعبی مساوات لا$^{۳}$ - ۱ = ۰ کو پورا کرتا ہے اور اسلئے اسکی ایک اصل سہ$^{۲}$ (44)
بھی ہے - اب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

لا$^{۳}$ - ۱ ≡ (لا - ۱) (لا - سہ) (لا - سہ$^{۲}$)

لا کو - لا میں تبدیل کرنے سے مساوات متماثلہ

لا$^{۳}$ + ۱ ≡ (لا + ۱) (لا + سہ) (لا + سہ$^{۲}$)

حاصل ہو گی جس سے

لا$^{۳}$ + ۱ = ۰

کی اصلیں معلوم ہونگی -

جہاں کہیں مقداروں کے کسی حاصل ضرب میں اکائی کے جذر الکعب داخل
ہوں اور انکی قوتیں ۲ سے زیادہ بیش ہوں تو ہم انکی بجائے سہ، یا سہ$^{۲}$، یا ایک
رکھ سکتے ہیں مثلاً

سہ$^{۴}$ = سہ$^{۳}$ × سہ = سہ ، سہ$^{۵}$ = سہ$^{۳}$ × سہ$^{۲}$ = سہ$^{۲}$ ،

سہ$^{۶}$ = سہ$^{۳}$ × سہ$^{۳}$ = ۱ ، وغیرہ

دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی یا دوسری مساوات سے
اکائی کے جذر الکعبوں کی حسب ذیل خاصیت ملتی ہے

۱ + سہ + سہ$^{۲}$ = ۰

اس مساوات کی مدد سے کسی جملہ کو جس میں حقیقی مقداریں اور خیالی
جذر الکعب داخل ہوں ہم ف + سہ ق ، ف + سہ$^{۲}$ ق ، سہ ف + سہ$^{۲}$ ق
میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں -

# مثالیں

۱ ــــ ثابت کرو کہ حاصل ضرب

( سہ م + سہ$^{2}$ ن ) ( سہ$^{2}$ م + سہ ن )

منطق ہے۔

جواب :۔ م$^{2}$ − م ن + ن$^{2}$

۲ ــــ حسب ذیل متماثلہ مساواتوں کو ثابت کرو۔

م$^{3}$ + ن$^{3}$ = ( م + ن ) ( سہ م + سہ$^{2}$ ن ) ( سہ$^{2}$ م + سہ ن )

م$^{3}$ − ن$^{3}$ = ( م − ن ) ( سہ م − سہ$^{2}$ ن ) ( سہ$^{2}$ م − سہ ن )

۳ ــــ ثابت کرو کہ حاصل ضرب

( عہ + سہ بہ + سہ$^{2}$ جہ ) ( عہ + سہ$^{2}$ بہ + سہ جہ )

منطق ہے۔

جواب :۔ عہ$^{2}$ + بہ$^{2}$ + جہ$^{2}$ − بہ جہ − جہ عہ − عہ بہ

۴ ــــ متماثلہ مساوات

( عہ + بہ + جہ ) ( عہ + سہ بہ + سہ$^{2}$ جہ ) ( عہ + سہ$^{2}$ بہ + سہ جہ )

≡ عہ$^{3}$ + بہ$^{3}$ + جہ$^{3}$ − ۳ عہ بہ جہ

کو ثابت کرو۔

۵ ــــ متماثلہ مساوات

( عہ + سہ بہ + سہ$^{2}$ جہ )$^{3}$ + ( عہ + سہ$^{2}$ بہ + سہ جہ )$^{3}$

≡ ( ۲ عہ − بہ − جہ ) ( ۲ بہ − جہ − عہ ) ( ۲ جہ − عہ − بہ )

کو ثابت کرو۔ سوال (۲) استعمال کرو۔

۶ ــــ متماثلہ مساوات (45)

( عہ + سہ بہ + سہ$^{2}$ جہ )$^{3}$ − ( عہ + سہ$^{2}$ بہ + سہ جہ )$^{3}$

≡ − ۳ $\sqrt{-3}$ ( بہ − جہ ) ( جہ − عہ ) ( عہ − بہ )

کو ثابت کرو۔ سوال (۲) استعمال کرو اور سہ ۔ سہ$^{2}$ کی بجائے اسکی قیمت

$\sqrt{-۳}$ درج کرو۔

۷ — متماثلہ مساوات

عَہ$^{۳}$ + بَہ$^{۳}$ + جَہ$^{۳}$ − ۳ عَہ بَہ جَہ ≡ (عہ$^{۳}$ + بہ$^{۳}$ + جہ$^{۳}$ − ۳ عہ بہ جہ)$^{۲}$

کو ثابت کرو جہاں

عَہ = عہ$^{۲}$ + ۲ بہ جہ، بَہ = بہ$^{۲}$ + ۲ جہ عہ، جَہ = جہ$^{۲}$ + ۲ عہ بہ

۸ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

م + ن، سہ م + سہ$^{۲}$ ن، سہ$^{۲}$ م + سہ ن

ہیں۔ جواب:۔ لا$^{۳}$ − ۳ م ن لا − (م$^{۳}$ + ن$^{۳}$) = ۰

۹ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

ل + م + ن، ل + سہ م + سہ$^{۲}$ ن، ل + سہ$^{۲}$ م + سہ ن

ہیں۔

جواب:۔ لا$^{۳}$ − ۳ ل لا$^{۲}$ + (ل$^{۲}$ − م ن) لا − (ل$^{۳}$ + م$^{۳}$ + ن$^{۳}$ − ۳ ل م ن) = ۰

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ اکائی کے ن، ن ویں جذروں کے جواب میں کسی تعداد کے ن، ن ویں جذر ہوتے ہیں۔ مساوات

لا$^{ن}$ − ۱ = ۰

کی اصلیں ۱ کے ن، ن ویں جذر ہیں۔

مثلاً ۱ کے تین جذرالکعب ہیں

$\sqrt[۳]{۱}$ ، سہ $\sqrt[۳]{۱}$ ، سہ$^{۲}$ $\sqrt[۳]{۱}$

جہاں $\sqrt[۳]{۱}$ سے معمولی حسابی عمل کے بموجب ۱ کا حقیقی جذرالکعب تعبیر ہوتا ہے۔ اِن میں سے ہر جذر مساوات لا$^{۳}$ − ۱ = ۰ کو پورا کرتا ہے۔ یہ واضح رہے کہ مندرجہ بالا تین جذرالکعب حاصل ہو جاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک کو ۱، سہ، سہ$^{۲}$ سے ضرب دیا جائے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی جذرالکعب کے علاوہ دو خیالی جذرالکعب بھی ہوتے ہیں جو حقیقی جذرالکعب کو اکائی کے خیالی جذرالکعبوں سے ضرب

دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً معمولی جذر الکعب ۳ کے علاوہ عدد ۲۷ کے
دو خیالی جذر الکعب

$$-\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}\sqrt{-۳} \text{ ، } -\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲}\sqrt{-۳}$$

ہیں۔ اِنکا کعب لینے سے اس بیان کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

۱۰ — وہ منطق مساوات بناؤ جس کی ایک اصل

$$سہ \sqrt[۳]{ق + \sqrt{ق^{۲} + ف^{۳}}} + سہ^{۲} \sqrt[۳]{ق - \sqrt{ق^{۲} + ف^{۳}}}$$

ہو جہاں $سہ^{۳} = ۱$۔ سوال ۸ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

جواب:- $لا^{۳} + ۳ف\, لا - ۲ق = ۰$

۱۱ — منطق سروں کے ساتھ مساوات بناؤ جسکی ایک اصل (46)

$$طہ_{۱} \sqrt[۳]{ف} + طہ_{۲} \sqrt[۳]{ق}$$

ہو جہاں $طہ_{۱}^{۳} = ۱$، $طہ_{۲}^{۳} = ۱$۔

مساوات

$$لا = طہ_{۱} \sqrt[۳]{ف} + طہ_{۲} \sqrt[۳]{ق}$$

کی طرفین کا کعب لینے سے اور لا کی بجائے اسکی بائیں طرف کی قیمت درج کرنیسے مساوات ملیگی

$$لا^{۳} - ف - ق = ۳\, طہ_{۱}\, طہ_{۲} \sqrt[۳]{ف\, ق}\, لا$$

پھر طرفین کا کعب لینے سے حاصل ہو گا

$$(لا^{۳} - ف - ق)^{۳} = ۲۷\, ف\, ق\, لا^{۳}$$

اب چونکہ $طہ_{۱}$ اور $طہ_{۲}$ میں سے ہر ایک کی قیمت ۱ یا سہ یا $سہ^{۲}$ ہو سکتی ہے
اسلئے اس مساوات کی نو اصلیں ہیں

$$\sqrt[۳]{ف} + \sqrt[۳]{ق} \text{ ، } سہ\sqrt[۳]{ف} + سہ\sqrt[۳]{ق} \text{ ، } سہ^{۲}\sqrt[۳]{ف} + سہ^{۲}\sqrt[۳]{ق}$$

$\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ق}}$

$\text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{سہ}\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ق}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{سہ}\sqrt[3]{\text{ق}}$

ہم یہاں یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آخری مساوات میں $\text{ط}_1$ اور $\text{ط}_2$ داخل نہیں ہوتے اسلئے ابتداً اِن اصلوں میں سے کسی ایک کو لا کے مساوی قرار دیا جا سکتا ہے اور مساوات مرتب کیجا سکتی ہے ۔ آخری مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ ہم $\text{لا} - \sqrt[3]{\text{ف}} - \sqrt[3]{\text{ق}}$ کی شکل کے نو اجزائے ضربی کو باہم ضرب دیتے جہاں یہ نو اجزائے ضربی مندرجۂ بالا نو اصلوں سے حاصل ہوتے ہیں ۔

۱۲ ــ تین کعبی مساواتیں علٰحدہ علٰحدہ بناؤ جنکی اصلیں مثال ماسبق کی مساوات کی اصلوں میں سے تین تین (انتصابی ستونوں میں لکھی ہوئیں) کے جٹ ہوں ۔

ہم اِن مساواتوں کو مثال ۸ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں اس طور پر کہ پہلے م اور ن کو $\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی پھر $\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، $\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی اور آخر میں $\text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ف}}$ ، $\text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ق}}$ کے مساوی لیتے ہیں ۔

جواب :ــ $\text{لا}^{3} - 3\sqrt[3]{\text{ف ق}}\ \text{لا} - \text{ف} - \text{ق} = 0$

$\text{لا}^{3} - 3\,\text{سہ}^{2}\sqrt[3]{\text{ف ق}}\ \text{لا} - \text{ف} - \text{ق} = 0$

$\text{لا}^{3} - 3\,\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ف ق}}\ \text{لا} - \text{ف} - \text{ق} = 0$

**۲۷ ــ اصلوں کے متشاکل تفاعل** ــ کسی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل وہ تفاعل ہیں جنمیں اصلیں ایک ہی وضع پر داخل ہوتی ہیں اس طور پر کہ تفاعل قیمت میں غیر متغیر رہتا ہے جب کسی دو اصلوں کو آپس میں تبدیل کر دیا جاتا ہے ۔ مثلاً اصلوں کے وہ تفاعل (اصلوں کا مجموعہ

اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ، وغیرہ) جو دفعہ ۲۲ میں بیان ہوئے ہیں اس نوعیت کے تفاعل ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی جملہ میں مثال کے طور پر عہ$_1$ کی بجائے عہ$_2$ اور عہ$_2$ کی بجائے عہ$_1$ لکھا جائے تو جملہ کی قیمت غیر متغیر رہتی ہے۔ (47)

دفعہ ۲۳ کے تفاعل اصلوں کے سادہ ترین متشاکل تفاعل ہیں کیونکہ انمیں ہر اصل صرف اپنی پہلی قوت میں داخل ہوتی ہے۔

ہم اصلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) کی مدد سے اصلوں کے مختلف متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ آئندہ کسی باب میں جسمیں اس مضمون پر بحث کیجائیگی ہم ثابت کرینگے کہ اصلوں کے کسی منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ یہاں جو مثالیں دیجائینگی ان میں سے اکثر کعبی اور چار درجی کی سادہ صورتوں سے متعلق ہونگی اور یہ مثالیں فی الحال اس قسم کے جملوں کو سروں کی رقوم میں معمولی ابتدائی طریقوں سے حاصل کرنے کے لئے کافی ہیں۔

عام طور پر کسی متشاکل تفاعل کو اسکی کسی رقم کے پیچھے علامت $\Sigma$ لگا کر تعبیر کیا جاتا ہے اور اسکی مدد سے پورا تفاعل لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر کعبی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو $\Sigma$ عہ$^2$ بہ$^2$ سے متشاکل تفاعل

عہ$^2$ بہ$^2$ + بہ$^2$ جہ$^2$ + جہ$^2$ عہ$^2$

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصلوں کے جتنے حاصل ضرب مل سکتے ہیں اونکو لیا گیا ہے اور ہر ایک کا جداگانہ مربع لیکر جمع کیا گیا ہے۔ اسی طرح $\Sigma$ عہ$^2$ بہ سے مجموعہ

عہ$^2$ بہ + عہ$^2$ جہ + بہ$^2$ جہ + بہ$^2$ عہ + جہ$^2$ عہ + جہ$^2$ بہ

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصلوں کی جتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں لی گئی ہیں اور ہر رقم کی پہلی اصل کا مربع لیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثالوں میں مختلف متشاکل تفاعل واقع ہونگے۔ انکی مدد سے طالب علم کو اس قسم کے جملے لکھنے کی مشق ہو جائیگی جب

نمونہ کی ایک رقم دی گئی ہو۔

(48)

# مثالیں

۱۔ کعبی مساوات

$$لا^{۳} + ف\, لا^{۲} + ق\, لا + ر = ۰$$

کی اصلوں کے جملہ $\sum عہ^{۲} بہ$ کی قیمت معلوم کرو۔

مساواتوں

$$عہ + بہ + جہ = - ف$$

$$بہ\, جہ + جہ\, عہ + عہ\, جہ = ق$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$\sum عہ^{۲} بہ + ۳\, عہ\, بہ\, جہ = - ف\, ق$$

پس $$\sum عہ^{۲} بہ = ۳ ر - ف\, ق$$

۲۔ اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$عہ^{۲} + بہ^{۲} + جہ^{۲}$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب:-** $\sum عہ^{۲} = ف^{۲} - ۲ ق$

۳۔ اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$عہ^{۳} + بہ^{۳} + جہ^{۳}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum عہ$ اور $\sum عہ^{۲}$ کی قیمتوں کو ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$عہ^{۳} + بہ^{۳} + جہ^{۳} + \sum عہ^{۲} بہ = - ف^{۳} + ۲ ف\, ق$$

پس مثال ۱ سے

$$\sum عہ^{۳} = - ف^{۳} + ۳ ف\, ق - ۳ ر$$

۴۔ اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$بہ^{۲} جہ^{۲} + جہ^{۲} عہ^{۲} + عہ^{۲} بہ^{۲}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$\text{به}^2\text{جه}^2 + \text{جه}^2\text{عه}^2 + \text{عه}^2\text{به}^2 + 2\,\text{عه به جه}\,(\text{عه} + \text{به} + \text{جه}) = \text{ق}^2$$

جس سے $\sum \text{عه}^2\text{به}^2 = \text{ق}^2 - 2\,\text{ف ر}$

۵ — اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$(\text{به} + \text{جه})(\text{جه} + \text{عه})(\text{عه} + \text{به})$$

کی قیمت معلوم کرو۔

یہ جملہ $2\,\text{عه به جه} + \sum \text{عه}^2\,\text{به}$ کے مساوی ہے۔ **جواب:-** $\text{ر} - \text{ف}$

۶ — چار درجی مساوات

$$\text{لا}^4 + \text{ف}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = 0$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

$$\text{عه}^2\text{به جه} + \text{عه}^2\text{به ضه} + \text{عه}^2\text{جه ضه} + \text{به}^2\text{عه جه} + \text{به}^2\text{عه ضه} + \text{به}^2\text{ضه جه}$$
$$+ \text{جه}^2\text{عه به} + \text{جه}^2\text{عه ضه} + \text{جه}^2\text{به ضه} + \text{ضه}^2\text{عه به} + \text{ضه}^2\text{عه جه} + \text{ضه}^2\text{جه به}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{عه} + \text{به} + \text{جه} + \text{ضه} = -\text{ف}$$

$$\text{عه به جه} + \text{عه به ضه} + \text{عه جه ضه} + \text{به جه ضه} = -\text{ر}$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$\sum \text{عه}^2\text{به جه} + 4\,\text{عه به جه ضه} = \text{ف ر}$$

پس $\sum \text{عه}^2\text{به جه} = \text{ف ر} - 4\,\text{س}$

۷ — اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل (48)

$$\text{عه}^2 + \text{به}^2 + \text{جه}^2 + \text{ضه}^2$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum$ عہ کا مربع لینے سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$\sum \text{عه}^2 = \text{ف}^2 - 2\,\text{ق}$$

۸ — اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$\text{عه}^2\text{به}^2 + \text{عه}^2\text{جه}^2 + \text{عه}^2\text{ضه}^2 + \text{به}^2\text{جه}^2 + \text{به}^2\text{ضه}^2 + \text{جه}^2\text{ضه}^2$$

کی قیمت معلوم کرو۔

مساوات

Σ عہ بہ = ق

کا مربع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

Σ عہ^۲ بہ^۲ + ۲ Σ عہ^۲ بہ جہ + ۶ عہ بہ جہ ضہ = ق^۲

پس مثال ۶ سے

Σ عہ^۲ بہ^۲ = ق^۲ − ۲ ف ر + ۲ س

۹ — اُسی چار درجی مساوات کی صورت میں Σ عہ^۳ بہ کی قیمت معلوم کرو۔

اس متشاکل تفاعل کو بنانے کے لئے ہم حروف عہ، بہ کی دو ترتیبین عہ بہ اور بہ عہ لیتے ہیں۔ ان سے Σ کی دو رقمیں عہ^۳ بہ اور بہ^۳ عہ حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح حروف عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے ہر زوج سے دو دو رقمیں حاصل ہونگی۔ اِس طرح متشاکل تفاعل میں کل بارہ رقمیں ہونگی۔

مساواتوں

Σ عہ بہ = ق، Σ عہ^۲ = ف^۲ − ۲ ق

کو باہم ضرب دو اور دیکھو کہ

Σ عہ^۲ Σ عہ بہ ≡ Σ عہ^۳ بہ + Σ عہ^۲ بہ جہ

[ اس آخری مساوات سے جس قسم کے نتیجے تعبیر ہوتے ہیں اِنکی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے کہ مساوات کی طرفین میں رقموں کی تعداد وہی ہونی چاہیئے۔ مثلاً موجودہ مثال میں چونکہ Σ عہ^۲ میں چار رقمیں اور Σ عہ بہ میں چھ رقمیں ہیں اِن کے حاصل ضرب میں ۲۴ رقمیں ہونی چاہئیں اور یہ درحقیقت Σ عہ^۳ بہ کی بارہ رقمیں اور Σ عہ^۲ بہ جہ کی بارہ رقمیں ہیں۔ ]

اس لئے امثلہ ماسبق کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

Σ عہ^۳ بہ = ف^۲ ق − ۲ ق^۲ − ف ر + ۴ س

۱۰ — اُسی چار درجی مساوات کی صورت میں

عہ^۴ + بہ^۴ + جہ^۴ + ضہ^۴

کی قیمت معلوم کرو۔

$\Sigma$ عہ$^{۲}$ کا مربع لینے اور حاصل شدہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\Sigma\, عہ^{۴} = ف^{۴} + ۲\, ق^{۲} - ۴\, ف^{۲}\, ق + ۴\, ف\, ر - ۴\, س$$

۱۱۔ مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱}\, لا^{ن-۱} + ب_{۲}\, لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

$\Sigma$ عہ$_{۱}$ کا مربع لینے سے ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$ب_{۱}^{۲} = \Sigma\, عہ_{۱}^{۲} + ۲\, \Sigma\, عہ_{۱}\, عہ_{۲}$$

پس $$\Sigma\, عہ_{۱}^{۲} = ب_{۱}^{۲} - ۲\, ب_{۲}$$

۱۲۔ مثال ماسبق کی مساوات کی اصلوں کے متکافیوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

دفعہ ۲۳ کی آخری دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا (50)

$$عہ_{۲}\, عہ_{۳} \cdots\cdots عہ_{ن} + عہ_{۱}\, عہ_{۳} \cdots\cdots عہ_{ن} + \cdots\cdots + عہ_{۱}\, عہ_{۲} \cdots\cdots عہ_{ن-۱} = (-۱)^{ن-۱}\, ب_{ن-۱}$$

اور $$عہ_{۱}\, عہ_{۲} \cdots\cdots عہ_{ن} = (-۱)^{ن}\, ب_{ن}$$

پہلی مساوات کو دوسری سے تقسیم کریں تو

$$\frac{۱}{عہ_{۱}} + \frac{۱}{عہ_{۲}} + \cdots\cdots + \frac{۱}{عہ_{ن}} = -\frac{ب_{ن-۱}}{ب_{ن}}$$

یعنی $$\Sigma\, \frac{۱}{عہ_{۱}} = -\frac{ب_{ن-۱}}{ب_{ن}}$$

اسی طرح اصلوں کے متکافیوں میں سے دو دو کے، تین تین کے، وغیرہ حاصل ضربوں کا مجموعہ آخر سے تیسرے یا آخر سے چوتھے وغیرہ سر کو آخری سر سے

تقسیم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۱۳ —— کعبی مساوات

ا. لا$^{3}$ + ۳ ا$_{1}$ لا$^{2}$ + ۳ ا$_{2}$ لا + ا$_{3}$ = ۰

کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

(بہ − جہ)$^{2}$ + (جہ − عہ)$^{2}$ + (عہ − بہ)$^{2}$

**نوٹ**:— عام طور پر مساوات کے سروں کو ثنائی سروں کی صورت میں لکھنا مفید ہوگا جیسا کہ مثال بالا میں کیا گیا ہے یعنی حرفی سروں ا.، ا$_{1}$، ا$_{2}$ وغیرہ کے علاوہ عددی سر وہی ہوں جو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ یہاں چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی ہے اسلئے یکے بعد دیگرے آنیوالے عددی سر وہ ہیں جو تیسری قوت کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یعنی ۱، ۳، ۳، ۱ —

ہمیں بہ آسانی حاصل ہوگا

ا.$^{2}$ {(بہ − جہ)$^{2}$ + (جہ − عہ)$^{2}$ + (عہ − بہ)$^{2}$} = ۱۸ (ا$_{1}^{2}$ − ا. ا$_{2}$)

۱۴ —— مساوات درجہ دوم

(لا − عہ)$^{2}$ (بہ − جہ)$^{2}$ + (لا − بہ)$^{2}$ (جہ − عہ)$^{2}$ + (لا − جہ)$^{2}$ (عہ − بہ)$^{2}$ = ۰

کے متواتر سروں کو مثال ماسبق کی کعبی مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو جہاں کعبی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

یہاں مثال ماسبق کے متشاکل تفاعل کے علاوہ حسب ذیل دو متشاکل تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنی ہونگی:—

عہ (بہ − جہ)$^{2}$ + بہ (جہ − عہ)$^{2}$ + جہ (عہ − بہ)$^{2}$،

عہ$^{2}$ (بہ − جہ)$^{2}$ + بہ$^{2}$ (جہ − عہ)$^{2}$ + جہ$^{2}$ (عہ − بہ)$^{2}$

**جواب**:— (ا. ا$_{2}$ − ا$_{1}^{2}$) لا$^{2}$ + (ا. ا$_{3}$ − ا$_{1}$ ا$_{2}$) لا
+ (ا$_{1}$ ا$_{3}$ − ا$_{2}^{2}$) = ۰

۱۵ —— مثال ۱۳ کی کعبی مساوات کی صورت میں

(۲ عہ − بہ − جہ) (۲ بہ − جہ − عہ) (۲ جہ − عہ − بہ)

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

چونکہ ۲عہ - بہ - جہ = ۳عہ - (عہ + بہ + جہ) = ۳عہ + $\frac{3\,ا_1}{ا_0}$

اسلئے مطلوبہ قیمت متماثلہ مساوات (51)

ا$_0$لا$^3$ + ۳ا$_1$لا$^2$ + ۳ا$_2$لا + ا$_3$ $\equiv$ ا$_0$(لا - عہ)(لا - بہ)(لا - جہ)

میں لا کی بجائے - $\frac{ا_1}{ا_0}$ درج کرنے سے بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

**جواب**:- ا$_0^3$(۲عہ - بہ - جہ)(۲بہ - جہ - عہ) ×
(۲جہ - عہ - بہ) = -۲۷(ا$_0^2$ا$_3$ - ۳ا$_0$ا$_1$ا$_2$ + ۲ا$_1^3$)

۱۶— چار درجی مساوات

ا$_0$لا$^4$ + ۴ا$_1$لا$^3$ + ۶ا$_2$لا$^2$ + ۴ا$_3$لا + ا$_4$ = ۰

کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

(بہ - جہ)$^2$(عہ - ضہ)$^2$ + (جہ - عہ)$^2$(بہ - ضہ)$^2$ + (عہ - بہ)$^2$(جہ - ضہ)$^2$

یہاں مساوات بالا میں عددی سرے وہ ہیں جو چوتھی قوت کے ثنائی جملہ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ زیر بحث متشاکل تفاعل

۲ $\sum$ عہ$^2$بہ$^2$ - ۲ $\sum$ عہ$^2$بہ جہ + ۱۲ عہ بہ جہ ضہ

کے متماثل ہے۔ مثالوں ۶ اور ۸ کے نتیجوں کو استعمال کیا جائے تو

ا$_0^2${(بہ - جہ)$^2$(عہ - ضہ)$^2$ + (جہ - عہ)$^2$(بہ - ضہ)$^2$ + (عہ - بہ)$^2$(جہ - ضہ)$^2$}
= ۲۴(ا$_0$ا$_4$ - ۴ا$_1$ا$_3$ + ۳ا$_2^2$)

۱۷— مثال ۱۶ کی مساوات کی چار اصلوں میں سے دو دو کے چھ حاصل ضرب لئے جائیں اور حاصل ضرب میں (مثلاً عہ بہ میں) بقیہ دو اصلوں کا حاصل ضرب (یعنی جہ ضہ) جمع کیا جائے تو ہمیں تین مجموعے ملینگے

بہ جہ + عہ ضہ، جہ عہ + بہ ضہ، عہ بہ + جہ ضہ

اب سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل دو متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے:-

(جہ عہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ) + (عہ بہ + جہ ضہ) (بہ جہ + عہ ضہ)
+ (بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ)،

(بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ)

ان میں سے پہلا متذکرۂ بالا مجموعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور دوسرا تینوں کا مسلسل حاصل ضرب - اب چونکہ یہ تینوں تفاعل (متذکرۂ بالا تین مجموعے) چار درجی مساوات کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں اسلئے ہم ان کو اختصاراً حروف لہ، مہ، نہ سے تعبیر کرینگے - اِس لئے ہمیں مہ نہ + نہ لہ + لہ مہ اور لہ مہ نہ کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہونگی -

قبل الذکر متشاکل تفاعل Σ عہ$^{۲}$ بہ جہ ہے جس کو بہ آسانی حسب ذیل طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے :-

ا$_{۰}^{۲}$ Σ مہ نہ = ۴ (۴ ا$_{۱}$ ا$_{۳}$ − ا$_{۰}$ ا$_{۴}$)

موخر الذکر متشاکل تفاعل ضرب دینے کے بعد

عہ بہ جہ ضہ (عہ$^{۲}$ + بہ$^{۲}$ + جہ$^{۲}$ + ضہ$^{۲}$) + عہ$^{۲}$ بہ$^{۲}$ جہ$^{۲}$ ضہ$^{۲}$ (۱/عہ$^{۲}$ + ۱/بہ$^{۲}$ + ۱/جہ$^{۲}$ + ۱/ضہ$^{۲}$)

کے مساوی ہے اور ہم معمولی عمل حساب کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں

ا$_{۰}^{۳}$ لہ مہ نہ = ۸ (۲ ا$_{۰}$ ا$_{۳}^{۲}$ − ۳ ا$_{۰}$ ا$_{۲}$ ا$_{۴}$ + ۲ ا$_{۱}^{۲}$ ا$_{۴}$)

۱۸ — مثال ۱۶ کی چار درجی مساوات کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے (52)
حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو :-

{(جہ − عہ)(بہ − ضہ) − (عہ − بہ)(جہ − ضہ)} {(عہ − بہ)(جہ − ضہ) − (بہ − جہ)(عہ − ضہ)}
{(بہ − جہ)(عہ − ضہ) − (جہ − عہ)(بہ − ضہ)}

یہ تفاعل بھی چار درجی مساوات کے نظریہ میں کافی اہمیت رکھتا ہے - اس غرض سے کہ اسکے لکھ لینے میں کوئی ابہام پیدا نہ ہو ہم اُس ترقیم کی تشریح کرینگے جو اس کتاب میں ہمیشہ استعمال ہوگی - یہ ترقیم اُسوقت بھی اُسی طرح کار آمد ہوگی جب دوسرے ایسے تفاعل دئے جائیں جو چار درجی مساوات کی اصلوں کے فرقوں پر مشتمل ہوں - اصلوں عہ، بہ، جہ کو دائری ترتیب میں رکھنے سے ہمیں تین فرق

بہ ـ جہ، جہ ـ عہ، عہ ـ بہ، ملتے ہیں اور ہر اصل میں سے ضہ کو تفریق کرنے سے تین دوسرے فرق عہ ـ ضہ، بہ ـ ضہ، جہ ـ ضہ ملتے ہیں۔ ان میں سے ہم دو دو فرق لیکر انہیں اس طرح مرتب کرتے ہیں:۔

(بہ ـ جہ)(عہ ـ ضہ)، (جہ ـ عہ)(بہ ـ ضہ)، (عہ ـ بہ)(جہ ـ ضہ)

زیر بحث تفاعل ان تین جملوں کے فرقوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ اِن فرقوں کو حسب معمول دائری ترتیب میں لیا گیا ہو۔

اب مثال ماسبق میں له، مہ، نہ کی جو قیمتیں دی گئی ہیں انکو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

مہ + نہ ≡ (بہ ـ جہ)(عہ ـ ضہ)، ـ نہ + له ≡ (جہ ـ عہ)(بہ ـ ضہ)، ـ

ـ له + مہ ≡ (عہ ـ بہ)(جہ ـ ضہ)

اسلئے ہمیں

(۲ له ـ مہ ـ نہ)(۲ مہ ـ نہ ـ له)(۲ نہ ـ له ـ مہ)

یا (۳ له ـ Σ عہ بہ)(۳ مہ ـ Σ عہ بہ)(۳ نہ ـ Σ عہ بہ)

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہوگی۔

اسکو ضرب دیدو اور Σ عہ بہ کی قیمت درج کرو اور مثال ۱۷ کے نتیجوں کو استعمال کرو تو مطلوبہ جملہ حسب ذیل حاصل ہوگا

ا$_0^3$ (۲ له ـ مہ ـ نہ)(۲ مہ ـ نہ ـ له)(۲ نہ ـ له ـ مہ)

= ـ ۴۳۲ (ا$_0$ ا$_2$ ا$_4$ + ۲ ا$_1$ ا$_2$ ا$_3$ ـ ا$_0$ ا$_3^2$ ـ ا$_1^2$ ا$_4$ ـ ا$_2^3$)

سروں کا یہ تفاعل اور امثلہ ۱۳، ۱۵، ۱۶ میں حاصل شدہ تفاعل کعبی اور چار درجی مساواتوں کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں۔

۱۹ـ مثال ۱۶ کے چار درجی کے سروں کی رقوم میں متشاکل تفاعل

(عہ ـ بہ)$^2$ + (عہ ـ جہ)$^2$ + (عہ ـ ضہ)$^2$ + (بہ ـ جہ)$^2$ + (بہ ـ ضہ)$^2$ + (جہ ـ ضہ)$^2$

کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو اختصاراً Σ (عہ ـ بہ)$^2$ سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

**جواب:-** $\text{ا}_0^2 \sum (\text{عہ} - \text{بہ})^2 = 48 (\text{ا}_1^2 - \text{ا}_0 \text{ا}_2)$

۲۰ — مثال ۱۶ کے چار درجی کی صورت میں سروں اور اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط ثابت کرو:-

$$\text{ا}_0^3 (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})(\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})$$
$$= 32 (\text{ا}_0^2 \text{ا}_3 - 3 \text{ا}_0 \text{ا}_1 \text{ا}_2 + 2 \text{ا}_1^3)$$

## ۲۸ — متشاکل تفاعلوں سے متعلق مسائل - مندرجۂ ذیل (53)

دو مسئلے جن پر ہم اس مضمون کی بحث ختم کرتے ہیں بہت سی مثالوں میں اُن نتیجوں کی تصدیق کرنے میں مفید ثابت ہونگے جو متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصلوں کے قوت نماؤں کا مجموعہ سروں کی رقوم میں تفاعل کی متناظر قیمت کی ہر رقم کے لاحقوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ متشاکل تفاعل کی ہر رقم کے لئے قوت نماؤں کا مجموعہ وہی ہوتا ہے۔ اِس مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا "**تمام اصلوں کا درجہ**" کہہ سکتے ہیں۔ اس مسئلہ کی صداقت دفعہ ماسبق کی مثالوں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷ وغیرہ کی مخصوص صورتوں سے ظاہر ہے۔ عام صورت میں اسکی تصدیق دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) سے ہو سکتی ہے کیونکہ ان مساواتوں میں ہر سر کا لاحقہ اصلوں کے متناظر تفاعل کے "تمام اصلوں کے درجہ" کے مساوی ہے۔ پس سروں کی کسی قوتوں کے کسی حاصل ضرب میں لاحقوں کا مجموعہ اصلوں کے متناظر تفاعل کے تمام رقموں کے درجہ کے مساوی ہونا چاہئے۔

مسئلہ ۲۔ جب کسی مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے تو اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کے لئے سروں کی رقوم میں ایسا جملہ ملیگا جس میں تمام رقموں کے عددی اجزائے ضربی کا جبری مجموعہ صفر کے مساوی ہوگا اگر متشاکل تفاعل صرف اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہو۔

اس مسئلہ کی صداقت عام مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھہ کر تمام

سروں $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$ . . . $\text{ا}_{\text{ن}}$ کو ایک کے مساوی فرض کرنے سے یعنی مساوات

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}} = 0$$

میں $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$ ..... میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی لینے سے ظاہر ہے ۔ کیونکہ اس صورت میں یہ مساوات ہو جائیگی $(\text{لا}+1)^{\text{ن}} = 0$ ۔ یعنے تمام اصلیں مساوی ہونگی۔ پس اصلوں کے فرقوں کا کوئی تفاعل صفر کے مساوی ہوگا اور اس لئے سروں کا تفاعل بھی صفر کے مساوی ہوگا کیونکہ یہ تفاعل اصلوں کے تفاعل کے مساوی ہے۔ لیکن یہ تفاعل عددی اجزائے ضربی کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہے جبکہ اس میں تمام سر $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$ ..... ایک کے مساوی بنائے جائیں ۔ اس مسئلہ کی مثالیں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰ (دفعہ ۲۷) ہیں ۔

## مثالیں (54)

۱ ـــ تشاکل تفاعل

$$\frac{\text{بہ}^2+\text{جہ}^2}{\text{بہ}\,\text{جہ}} + \frac{\text{جہ}^2+\text{عہ}^2}{\text{جہ}\,\text{عہ}} + \frac{\text{عہ}^2+\text{بہ}^2}{\text{عہ}\,\text{بہ}}$$

کی قیمت ف، ق، ر کی رقوم میں معلوم کرو جہاں عہ، بہ، جہ کعبی مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{ف}\,\text{لا}^2 + \text{ق}\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

کی اصلیں ہیں ۔

**جواب** :ـ $\frac{\text{ف}\,\text{ق}}{\text{ر}} - 3$

۲ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$(\text{بہ}+\text{جہ}-\text{عہ})^3 + (\text{جہ}+\text{عہ}-\text{بہ})^3 + (\text{عہ}+\text{بہ}-\text{جہ})^3$$

کی قیمت معلوم کرو ۔

**جواب** :ـ $24\,\text{ر} - \text{ف}^3$

۳ ـــ اسی مساوات کے لئے $\Sigma\,\text{عہ}^3\,\text{بہ}^3$ کی قیمت معلوم کرو ـ

یہاں $\Sigma\,\text{عہ}\,\text{بہ}\;\Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}^2 = \Sigma\,\text{عہ}^3\,\text{بہ}^3 + \text{عہ}\,\text{بہ}\,\text{جہ}\;\Sigma\,\text{عہ}^2\,\text{بہ}$

**جواب** :ـ $\text{ق}^3 - 3\,\text{ف}\,\text{ق}\,\text{ر} + 3\,\text{ر}^2$

۴ ـــ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل

$$(\text{بہ}^{3}-\text{جہ}^{3})^{2}+(\text{جہ}^{3}-\text{عہ}^{3})^{2}+(\text{عہ}^{3}-\text{بہ}^{3})^{2}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\text{عہ}^{2}$ کا مربع لینے سے $\Sigma\,\text{عہ}^{6}$ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۷۲ مثال ۳)

**جواب**:- $۲\text{ف}^{6}-۱۲\text{ف}^{4}\text{ق}+۱۲\text{ف}^{3}\text{ر}+۱۸\text{ف}^{2}\text{ق}^{2}-۱۸\text{فقر}-۶\text{ق}^{3}$

۵ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{\text{بہ}^{2}+\text{جہ}^{2}}{\text{بہ}+\text{جہ}}+\frac{\text{جہ}^{2}+\text{عہ}^{2}}{\text{جہ}+\text{عہ}}+\frac{\text{عہ}^{2}+\text{بہ}^{2}}{\text{عہ}+\text{بہ}}$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب**:- $\dfrac{۲\text{ف}^{2}\text{ق}-۴\text{فر}-۲\text{ق}^{2}}{\text{ر}-\text{فق}}$

۶ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{\text{عہ}^{2}+\text{بہ جہ}}{\text{بہ}+\text{جہ}}+\frac{\text{بہ}^{2}+\text{جہ عہ}}{\text{جہ}+\text{عہ}}+\frac{\text{جہ}^{2}+\text{عہ بہ}}{\text{عہ}+\text{بہ}}$$

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب**:- $\dfrac{\text{ف}^{4}-۳\text{ف}^{2}\text{ق}+۵\text{فر}+\text{ق}^{2}}{\text{ر}-\text{فق}}$

۷ ـــ اسی مساوات کے لئے

$$\frac{۲\,\text{بہ جہ}-\text{عہ}^{2}}{\text{بہ}+\text{جہ}-\text{عہ}}+\frac{۲\,\text{جہ عہ}-\text{بہ}^{2}}{\text{جہ}+\text{عہ}-\text{بہ}}+\frac{۲\,\text{عہ بہ}-\text{جہ}^{2}}{\text{عہ}+\text{بہ}-\text{جہ}}$$

کی قیمت معلوم کرو ـــ

**جواب**: $\dfrac{\text{ف}^{4}-۲\text{ف}^{2}\text{ق}+۱۴\text{فر}-۸\text{ق}^{2}}{۴\text{فق}-\text{ف}^{3}-۸\text{ر}}$

(55) ۸ ـــ اسی مساوات کے لئے متشاکل تفاعل $\Sigma\left(\dfrac{\text{عہ}-\text{بہ}}{\text{عہ}+\text{بہ}}\right)^{2}$ کی قیمت معلوم کرو۔

**جواب**:- $\dfrac{۳\text{ف}^{2}\text{ق}^{2}-۴\text{ف}^{3}\text{ر}-۴\text{ق}^{3}-۲\text{فقر}-۹\text{ر}^{2}}{(\text{ر}-\text{فق})^{2}}$

۹ — مساوات

$$\text{لا}^{۴} + \text{ف}\,\text{لا}^{۳} + \text{ق}\,\text{لا}^{۲} + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$$

کیلئے $\sum \frac{\text{عہ}\,\text{بہ}}{\text{جہ}^{۲}}$ کی قیمت ف، ق، ر، س کی رقوم میں معلوم کرو۔

یہاں $\sum \text{عہ}\,\text{بہ} \sum \frac{۱}{\text{عہ}^{۲}} = \sum \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} + \sum \frac{\text{عہ}\,\text{بہ}}{\text{جہ}^{۲}}$

اور $\sum \text{عہ} \sum \frac{۱}{\text{عہ}} = ۴ + \sum \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}}$

**جواب:**- $\frac{\text{ق}\,\text{ر}^{۲} - ۲\,\text{ق}^{۲}\,\text{س} - \text{ف}\,\text{ر}\,\text{س} + ۴\,\text{س}^{۲}}{\text{س}^{۲}}$

۱۰ — مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلوں کے تفاعل $\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}^{۲}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

**جواب:**- $\frac{\text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{ب}_{\text{ن}} - \text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{\text{ن}-۱}^{۲} + ۲\,\text{ب}_{۱}\,\text{ب}_{\text{ن}-۲}\,\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}}^{۲}}$

۱۲ — کعبی مساوات

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳} = ۰$$

کے سروں کی رقوم میں $\sum (\text{ا}_{۰}\,\text{عہ} + \text{ا}_{۱})^{۲} (\text{بہ} - \text{جہ})^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

**جواب:**- $\frac{۱۸}{\text{ا}_{۰}^{۲}} (\text{ا}_{۰}\,\text{ا}_{۲} - \text{ا}_{۱}^{۲})^{۲}$

۱۳ — مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\sum \frac{\text{عہ}_{۱}^{۲} + \text{عہ}_{۲}^{۲}}{\text{عہ}_{۱} + \text{عہ}_{۲}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

دیا ہوا تفاعل شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\text{ع}_1 \left\{ \frac{1}{\text{ع}_1} + \frac{1}{\text{ع}_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ع}_\text{ن}} \right\} - 1$$

$$+ \ \text{ع}_2 \left\{ \frac{1}{\text{ع}_1} + \frac{1}{\text{ع}_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ع}_\text{ن}} \right\} - 1$$

$$+ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \ \text{ع}_\text{ن} \left\{ \frac{1}{\text{ع}_1} + \frac{1}{\text{ع}_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\text{ع}_\text{ن}} \right\} - 1$$

یا $\sum \text{ع}_1 \sum \frac{1}{\text{ع}_1} - \text{ن}$ ۔ پس و قِس علیٰ ہذا

(56) **جواب** :- $\frac{\text{ب}_1 \text{ب}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_\text{ن}} - \text{ن}$

۱۴ــــ مساوات

$$\sqrt{\text{ت} - \text{ع}^2} + \sqrt{\text{ت} - \text{ب}^2} + \sqrt{\text{ت} - \text{ج}^2} = 0$$

کو منطق شکل میں لاؤ اور ت میں حاصل ہونیوالی مساوات کے سروں کو کعبی مساوات مثال (۱) کے سروں کی رقوم میں بیان کرو ۔

**جواب** :- $3\text{ت}^4 - 2(\text{ف}^2 - 2\text{ق})\text{ت}^2 - \text{ف}^4 + 4\text{ف}^2\text{ق} - 8\text{ف}\text{ر} = 0$ ۔

۱۵ــــ اگر مثال (۶) کے چار درجی کی اصلیں ع، ب، ج، ض ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ع}^2+1)(\text{ب}^2+1)(\text{ج}^2+1)(\text{ض}^2+1) = (1 - \text{ق} + \text{س})^2 + (\text{ف} - \text{ر})^2$$

مساوات $\text{لا}^2 + 1 = 0$ کی ہر اصل کو باری باری سے دفعہ ۱۶ کی مساوات متماثلہ میں درج کرو اور ضرب دو ۔

۱۶ــــ ن ویں درجہ کی عام مساوات کی اصلوں اور سروں کے درمیان ربط ذیل ثابت کرو :-

$$(\text{ع}_1^2+1)(\text{ع}_2^2+1)\cdots\cdots(\text{ع}_\text{ن}^2+1) = (1 - \text{ب}_2 + \text{ب}_4 - \cdots\cdots)^2 + (\text{ب}_1 - \text{ب}_3 + \cdots)^2$$

۱۷ — (عه$^{۲}$ + ۲)(به$^{۲}$ + ۲)(جه$^{۲}$ + ۲)(ضه$^{۲}$ + ۲)

کی عددی قیمت معلوم کرو جہاں عه، به، جه، ضه مساوات

لا$^{۴}$ − ۷ لا$^{۳}$ + ۸ لا$^{۲}$ − ۵ لا + ۱۰ = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۱۸ — اگر عه، به، جه، ضه مساوات

ا$_{۰}$ لا$^{۴}$ + ۴ ا$_{۱}$ لا$^{۳}$ + ۶ ا$_{۲}$ لا$^{۲}$ + ۴ ا$_{۳}$ لا + ا$_{۴}$ = ۰

کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا$_{۰}^{۳}$ (به + جه)(جه + عه)(عه + به)(به + ضه)(جه + ضه)(عه + ضه)
= ۱۶ {۶ ا$_{۱}$ ا$_{۲}$ ا$_{۳}$ − ا$_{۰}$ ا$_{۳}^{۲}$ − ا$_{۱}^{۲}$ ا$_{۴}$}

زیر بحث متشاکل تفاعل (مه + نه)(نه + له)(له + مه) یا $\Sigma$ له مه نه − له مه نه کے مساوی ہے جہاں له، مه، نه کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۷۲ مثال ۱۷ میں دی گئی تھیں۔

۱۹ — مثال ۹ کی چار درجی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma$ (عه − به)$^{۴}$ کی قیمت محسوب کرو۔

**جواب** :- ۳ف$^{۴}$ − ۱۶ف$^{۲}$ق + ۲۰ق$^{۲}$ + ۴ف ر − ۱۶ اس

۲۰ — ثابت کرو کہ جب چار درجی کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے جیسا کہ مثال ۱۸ میں لکھا گیا ہے تو مثال ماسبق کے متشاکل تفاعل کی قیمت شکل ذیل میں لکھی جا سکتی ہے:—

ا$_{۰}^{۴}$ $\Sigma$ (عه − به)$^{۴}$ = ۱۶ {۴۸ (ا$_{۰}$ ا$_{۲}$ − ا$_{۱}^{۲}$)$^{۲}$ − ا$_{۰}^{۲}$ (ا$_{۰}$ ا$_{۴}$ − ۴ ا$_{۱}$ ا$_{۳}$ + ۳ ا$_{۲}^{۲}$)}

۲۱ — ایک خط مستقیم پر نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے ایک ثابت مبداء سے جو اسی خط میں واقع ہے درجہ دوم کی مساواتوں

ا لا$^{۲}$ + ب لا + ج = ۰، اَ لا$^{۲}$ + بَ لا + جَ = ۰

کی اصلوں (عه، به) اور (عَه، بَه) کے مساوی ہیں۔ اگر ایک زوج کے نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ذیل کا ربط موجود ہے:—

ا جَ + اَ ج − ۲ ب بَ = ۰

۲۲ — ایک خط پر کے تین نقطوں ا، ب، ج کے فاصلے اسی خط پر کے

ایک ثابت مبداء و سے مساوات

ا لا$^{3}$ + ۳ ب لا$^{2}$ + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلوں کے مساوی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں ا، ب، ج میں سے ایک (57)
نقطہ باقی دو نقطوں کے درمیانی فاصلے کی تنصیف کرے۔

دفعہ ۲۷ کی مثال ۱۵ سے مقابلہ کرو۔

**جواب**:- ا$^{2}$ د - ۳ ا ب ج + ۲ ب$^{3}$ = ۰

۲۳ — سوال گذشتہ کی ترتیب کو قائم رکھو اور وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں و، ا، ب، ج سے ایک موسیقی تقسیم بنے۔

**جواب**:- ا د$^{2}$ - ۳ ب ج د + ۲ ج$^{3}$ = ۰

اسکو مثال ۲۲ کے نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ اصلوں کو ان کے متکافیوں میں بدلا جائے۔ یا اسکو بہ آسانی آزادانہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔

۲۴ — اگر مساوات

ا لا$^{4}$ + ۴ ب لا$^{3}$ + ۶ ج لا$^{2}$ + ۴ د لا + ع = ۰

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں ایسا رابطہ ہو کہ عہ - ضہ، بہ - ضہ، جہ - ضہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ

ا ج ع + ۲ ب ج د - ا د$^{2}$ - ب$^{2}$ ع - ج$^{3}$ = ۰

دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۲۵ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$\frac{\text{بہ جہ + سہ جہ عہ + سہ}^{2}\text{ عہ بہ}}{\text{عہ + سہ بہ + سہ}^{2}\text{ جہ}}\ ,\ \frac{\text{بہ جہ + سہ}^{2}\text{ جہ عہ + سہ عہ بہ}}{\text{عہ + سہ}^{2}\text{ بہ + سہ جہ}}$$

ہوں جہاں سہ$^{3}$ = ۱ اور عہ، بہ، جہ کعبی مساوات

ا لا$^{3}$ + ۳ ب لا$^{2}$ + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلیں ہیں۔ **جواب**:- (ا ج - ب$^{2}$) لا$^{2}$ + (ا د - ب ج) لا + (ب د - ج$^{2}$) = ۰

دفعہ ۲۷ کی مثالوں ۱۳ اور ۱۴ سے مقابلہ کرو۔

۲۶ — (۲ بہ جہ - جہ عہ - عہ بہ)(۲ جہ عہ - عہ بہ - بہ جہ)(۲ عہ بہ - بہ جہ - جہ عہ)

کو دو مکعبوں کے حاصل جمع میں لکھو۔ **جواب**:- (به جه + سه جه عه + سه$^{2}$ عه به)$^{3}$ + (به جه + سه$^{2}$ جه عه + سه عه به)$^{3}$

دفعہ ۲۶ مثال ۵ سے مقابلہ کرو۔

**۲۷** — (لا + ما + ی)$^{3}$ + (لا + سه ما + سه$^{2}$ ی)$^{3}$ + (لا + سه$^{2}$ ما + سه ی)$^{3}$ کو لا$^{3}$ + ما$^{3}$ + ی$^{3}$ اور لا ما ی کی رقوم میں بیان کرو جہاں سه$^{3}$ = ۱۔

**جواب**:- ۳ (لا$^{3}$ + ما$^{3}$ + ی$^{3}$) + ۱۸ لا ما ی

**۲۸** — اگر

(لا$^{3}$ + ما$^{3}$ + ی$^{3}$ − ۳ لا ما ی) (لاَ$^{3}$ + ماَ$^{3}$ + یَ$^{3}$ − ۳ لاَ ماَ یَ)

≡ ﻻ$^{3}$ + مـا$^{3}$ + ے$^{3}$ − ۳ ﻻ مـا ے

تو ﻻ، مـا، ے کو لا، ما، ی، لاَ، ماَ، یَ کی رقوم میں معلوم کرو۔

دفعہ ۲۶ کی مثال ۴ کا استعمال کرو۔

**جواب**:- ﻻ = لا لاَ + ما ماَ + ی یَ، مـا = لا ماَ + ما یَ + ی لاَ،

ے = لا یَ + ما لاَ + ی ماَ

**۲۹** — (عه + به + جه)$^{3}$ عه به جه − (به جه + جه عه + عه به)$^{3}$ کو تین اجزائے ضربی میں تحویل کرو جنمیں سے ہر ایک عه، به، جه میں دوسرے درجہ کا جملہ ہو۔

**جواب**:- (عه$^{2}$ − به جه) (به$^{2}$ − جه عه) (جه$^{2}$ − عه به)

دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

**۳۰** — حسب ذیل جملوں کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرو۔ (58)

(۱) (به − جه)$^{2}$ (به + جه − ۲ عه) + (جه − عه)$^{2}$ (جه + عه − ۲ به) + (عه − به)$^{2}$ (عه + به − ۲ جه)

(۲) (به − جه) (به + جه − ۲ عه)$^{2}$ + (جه − عه) (جه + عه − ۲ به)$^{2}$ + (عه − به) (عه + به − ۲ جه)$^{2}$

**جواب**:- (۱) (۲ عه − به − جه) (۲ به − جه − عه) (۲ جه − عه − به)

(۲) − ۹ (به − جه) (جه − عه) (عه − به)

**۳۱** — وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

لا$^{3}$ − ف لا$^{2}$ + ق لا − ر = ۰

کی اصلوں کا ایک زوج شکل $ا \pm ا\sqrt{-1}$ میں ہو۔ ایسی صورت میں اصلوں کو کس طرح

معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اگر حقیقی اصل ب ہو تو اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ لینے سے بہ آسانی ف^۲ - ۲ق = ب^۲ حاصل ہو گا۔ مطلوبہ شرط ہو گی

(ف^۲ - ۲ق)(ق^۲ - ۲ف ر) - ر^۲ = ۰

**۳۲** — مساوات

لا^۳ - ۷لا^۲ + ۲۰لا - ۲۴ = ۰

کو حل کرو جسکی اصلیں مثال ۳۱ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔

**جواب**:- ۳، ۲ ± ۲√-۱

**۳۳** — وہ شرطیں معلوم کرو کہ چار درجی مساوات

لا^۴ - ف لا^۳ + ق لا^۲ - ر لا + س = ۰

کی اصلیں شکل ا ± ا√-۱، ب ± ب√-۱ کی ہوں۔ یہاں سروں کے درمیان دو شرطیں ہونی چاہئیں کیونکہ اصلوں میں صرف دو مجہول مقداریں شامل ہیں۔

**جواب**:- ف^۲ - ۲ق = ۰، ر^۲ - ۲ق س = ۰

**۳۴** — مساوات

لا^۴ + ۴لا^۳ + ۸لا^۲ - ۱۲۰لا + ۹۰۰ = ۰

کو حل کرو جسکی اصلیں مثال ۳۳ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔

**جواب**:- ۳ ± ۳√-۱، -۵ ∓ ۵√-۱

**۳۵** — اگر مساوات

لا^۳ + ق لا + ر = ۰

کی ایک اصل ع + بہ√-۱ ہو تو ثابت کرو کہ مساوات

لا^۳ + ق لا - ر = ۰

کی ایک اصل ۲ع ہو گی۔

**۳۶** — وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰

کی دو اصلوں ع، بہ میں ربط ع بہ + ۱ = ۰ موجود ہو۔

**جواب :-** ۱ + ق + ف ر + ر^۲ = ۰

۳۷ - وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی مساوات (59)

لا^۴ + ف لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰

کی دو اصلوں عہ ، بہ میں ربط عہ بہ + ۱ = ۰ موجود ہو۔

مطلوبہ شرط ، س کی قوتوں میں مرتبہ ، حسب ذیل ہے

۱ + ق + ف ر + ر^۲ + (ف^۲ + ف ر - ۲ ق - ۱) س + (ق - ۱) س^۲ + س^۳ = ۰

۳۸ — مساوات

لا^ن + ب۱ لا^(ن-۱) + ب۲ لا^(ن-۲) + ...... + بن = ۰

کی اصلوں کے تفاعل Σ (عہ۱ - عہ۲)^۲ عہ۳ عہ۴ ...... عہن کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو بہ آسانی مثال ۱۳ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

**جواب :-** (-۱)^ن { ب۲ بن-۱ - ن^۲ بن }

۳۹ — اگر مساوات

ا۰ لا^ن + ن ا۱ لا^(ن-۱) + (ن (ن - ۱))/(۲ × ۱) ا۲ لا^(ن-۲) + ...... + ان = ۰

کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ انکو جملہ

- ا۱/ا۰ ± ر/ا۰ √(۳ (ا۱^۲ - ا۰ ا۲)/(ن + ۱))

میں (ن جفت ہو تو) رکو ۱ ، ۳ ، ۵ ، ...... ن - ۱ تمام قیمتیں دینے سے اور (ن طاق ہو تو) ۰ ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ...... ن - ۱ تمام قیمتیں دینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۴۰ — تین مقداروں عہ ، بہ ، جہ کے فرقوں کو عہ۱ ، بہ۱ ، جہ۱ سے تعبیر کیا جائے یعنی

عہ۱ = بہ - جہ ، بہ۱ = جہ - عہ ، جہ۱ = عہ - بہ

تو ثابت کرو کہ

عہ۱^۳ + بہ۱^۳ + جہ۱^۳ = ۳ عہ۱ بہ۱ جہ۱ ،

عہ۱^۴ + بہ۱^۴ + جہ۱^۴ = ۱/۲ { عہ۱^۲ + بہ۱^۲ + جہ۱^۲ }^۲ ،

اور $عـ_1^5 + بـ_1^5 + جـ_1^5 = \frac{5}{2}\left\{عـ_1^2 + بـ_1^2 + جـ_1^2\right\} عـ_1 بـ_1 جـ_1$

مساوات

$$لا^3 + ق\,لا - ر = 0$$

کی اصلوں کو $عـ_1$، $بـ_1$، $جـ_1$ لینے سے اور متشاکل تفاعلوں $\Sigma عـ_1^3$، $\Sigma عـ_1^4$، $\Sigma عـ_1^5$ کی قیمتوں کو ق اور ر کی رقوم میں محسوب کرنے سے مطلوبہ نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ (مساوات بالا میں دوسری رقم غائب ہے کیونکہ اصلوں کا مجموعہ = ۰)۔ اس عمل کی توسیع کیجا سکتی ہے اور $\Sigma عـ_1^6$، $\Sigma عـ_1^7$ وغیرہ کے لئے ضوابط معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اسلئے متواتر قوتوں کے مجموعے حاصل ضرب $عـ_1 بـ_1 جـ_1$ اور حاصل جمع $عـ_1^2 + بـ_1^2 + جـ_1^2$ کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں۔ انہیں سے پہلا ر کے مساوی اور دوسرا $-2(بـ_1 جـ_1 + جـ_1 بـ_1 + عـ_1 بـ_1)$ یعنی $-2ق$ کے مساوی ہے۔ ان مجموعوں کو طریقہ ذیل پر محسوب کیا جا سکتا ہے:۔

مساوات $لا^3 = ر - ق\,لا$ اور اس کا مربع، مکعب وغیرہ لیکر حاصل ہونیوالی مساواتوں کی مدد سے اور لا، یا $لا^2$ سے ضرب دینے کے بعد لا کی کسی قوت کو مثلاً $لا^ف$ کو متواتر تحویلوں کے ذریعہ شکل $ا + ب\,لا + ج\,لا^2$ میں لایا جا سکتا ہے جہاں ا، ب، ج تفاعل ہیں ق اور ر کے۔ پھر $عـ_1$، $بـ_1$، $جـ_1$ کو مندرج کر کے جمع کرنے سے حاصل ہوگا $\Sigma عـ_1^ف = 3ا - 2ق\,ج$۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی طریقہ سے $\Sigma عـ_1^7 = 7ق^2 ر$، $\Sigma عـ_1^{11} = 11ق\,ر(ق^3 - ر^2)$ کو ثابت کر سکتا ہے۔

# چوتھا باب (60)

## مساواتوں کا استحالہ

**۲۹ ــ مساواتوں کا استحالہ** ۔ بہت سی مثالوں میں کسی مساوات کی اصلوں کی قیمتیں، سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر ہم اسکو معمولی اندراجات کے ذریعہ یا اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی مدد سے دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرسکتے ہیں، جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے ساتھ مقررہ روابط رکھتی ہوں ۔ اِس قسم کے استحالہ سے مساوات کی اصلوں وغیرہ پر بحث کرنے میں بڑی مدد ملتی ہے ۔ اب ہم اہم تریں ابتدائی استحالوں کی تشریح کرینگے ۔

**۳۰ ــ اصلیں بہ تبدیل علامت** ۔ ایک مساوات کو دوسری مساوات میں تحویل کرنیکے لئے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے مساوی مگر مختلف العلامت ہوں فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلیں $\text{ع}_{۱}$، $\text{ع}_{۲}$، $\text{ع}_{۳}$، ...... $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہیں ۔ تب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن} \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲}) \ldots (لا - ع_{ن})$$

اب اگر لا کو ـ ما میں بدلدیا جائے تو خواہ ن جفت ہو یا طاق ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$ما^{ن} - ب_{۱} ما^{ن-۱} + ب_{۲} ما^{ن-۲} - \ldots\ldots \pm ب_{ن-۱} ما \mp ب_{ن} \equiv (ما + ع_{۱}) \ldots (ما + ع_{ن})$$

اسلئے ما کے اس کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ایسی مساوات ملیگی جسکی اصلیں ہونگی ـ $ع_{۱}$، ـ $ع_{۲}$، ـ $ع_{۳}$، ...... ، ـ $ع_{ن}$ ـ اس لئے مطلوبہ استحالہ حاصل کرنیکے لئے دی ہوئی مساوات کی دوسری، چوتھی، چھٹی وغیرہ رقموں کی صرف علامتیں بدلنی چاہئیں ـ

## مثالیں

۱ ـــ ایسی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$لا^{۵} + ۷لا^{۴} + ۷لا^{۳} - ۸لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$$

کی اصلیں بہ تبدیل علامت ہوں ـ

جواب :- $لا^{۵} - ۷لا^{۴} + ۷لا^{۳} + ۸لا^{۲} + لا - ۱ = ۰$

۲ ـــ مساوات

$$لا^{۶} + ۳لا^{۵} + لا^{۳} - لا^{۲} + ۷لا + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کی علامتیں تبدیل کرو ـ

(غیر موجود رقموں کو صفر سر کے ساتھ مساوات میں داخل کرو) ـ

جواب :- $لا^{۶} + ۳لا^{۵} + لا^{۳} + لا^{۲} + ۷لا - ۲ = ۰$

(61)

### ۳۱ ـــ دی ہوئی مقدار سے اصلونکو ضرب دینا ـ

اگر ایک مساوات کو جسکی اصلیں $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$، ...... $ع_{ن}$ ہیں دوسری ایسی مساوات میں

تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں م عہ۱، م عہ۲، ..... م عہن ہوں تو دفعہ ماسبق کی متماثلہ میں لا کی بجائے $\frac{ما}{م}$ درج کرو۔ پھر اسکو $م^{ن}$ سے ضرب دو تو

$$ما^{ن} + م ب_{۱} ما^{ن-۱} + م^{۲} ب_{۲} ما^{ن-۲} + \ldots\ldots + م^{ن-۱} ب_{ن-۱} ما + م^{ن} ب_{ن}$$

$$\equiv (ما - م عہ_{۱})(ما - م عہ_{۲}) \ldots\ldots (ما - م عہ_{ن})$$

پس مساوات کی اصلوں کو دی ہوئی مقدار م سے ضرب دینا ہو تو متواتر سروں کو دوسری رقم سے شروع کر کے علی الترتیب م، $م^{۲}$، $م^{۳}$ ..... $م^{ن}$ سے ضرب دینا چاہیے۔

یہ تحویل اسوقت کارآمد ہوتی ہے جب دی ہوئی مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک نہ ہو اور اسکو ایک بنانا مطلوب ہو اور عام طور پر اس تحویل کو مساوات سے کسری سروں کو دور کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر پہلی رقم کا سر ا ہو تو ہم ایسی مساوات بناتے ہیں جسکی اصلیں ا عہ۱، ا عہ۲، ..... ا عہن ہوں یہ تحویل شدہ مساوات ا سے پوری طرح تقسیم ہو جائیگی اور ایسی تقسیم عمل میں لانیکے بعد $لا^{ن}$ کا سر ایک ہو جائیگا۔

جب کچھ سر کسری ہوں تو کسروں کے تمام نسب نماوں کا ذو اضعاف اقل م معلوم کرو اور مساوات کی اصلوں کو مقدار م سے ضرب دو تو وہ مساوات ملیگی جو کسروں سے آزاد ہوگی۔ بہت سی صورتوں میں ذو اضعاف اقل سے چھوٹی مقدار سے ضرب دینا اس مقصد کے لئے کافی ہوگا جیسا کہ ذیل کی مثالوں سے ظاہر ہے۔

# مثالیں

۱۔ مساوات

$$۳ لا^{۴} - ۴ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} - ۲ لا + ۱ = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔

ہم اصلوں کو ۳ سے ضرب دیتے ہیں۔

**جواب:**- $لا^{۴} - ۴لا^{۳} + ۱۲لا^{۲} - ۱۸لا + ۲۷ = ۰$

۲ — مساوات

$$لا^{۳} - \frac{۱}{۲}لا^{۲} + \frac{۲}{۳}لا - ۱ = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

اصلوں کو ۶ سے ضرب دو۔ **جواب:**- $لا^{۳} - ۳لا^{۲} + ۲۴لا - ۲۱۶ = ۰$

(62) ۳ — مساوات

$$لا^{۳} - \frac{۵}{۲}لا^{۲} - \frac{۷}{۱۸}لا + \frac{۱}{۱۰۸} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

ان کسروں کے نسب نماؤں کے اجزائے ضربی پر غور کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ اِنکے ذو اضعاف اقل سے بہت چھوٹا عدد کسروں کو دور کرنیکے لئے کافی ہے۔ اگر مطلوبہ ضرب دینے والا عدد م ہو تو تحویل شدہ مساوات لکھی جائیگی

$$لا^{۳} - م\frac{۵}{۲}لا^{۲} - م^{۲}\frac{۷}{۲\times۳^{۲}}لا + م^{۳}\times\frac{۱}{۲^{۲}\times۳^{۳}} = ۰$$

اب یہ ظاہر ہے کہ اگر م کو ۶ کے مساوی لیا جائے تو ہر سر صحیح عدد بن جائیگا۔

پس صرف ۶ سے ضرب دینا ہوگا۔

**جواب:**- $لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} - ۱۴لا + ۲ = ۰$

۴ — مساوات

$$لا^{۴} + \frac{۳}{۱۰}لا^{۲} + \frac{۱۳}{۲۵}لا + \frac{۷۷}{۱۰۰۰} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں طالب علم کو چاہئیے کہ غیر موجود رقموں کو صفر سروں کے ساتھ مساوات میں داخل کرے۔ مطلوبہ ضارب ۱۰ ہے۔

**جواب:**- $لا^{۴} + ۳۰لا^{۲} + ۵۲۰لا + ۷۷۰ = ۰$

۵ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{4} - \frac{5}{6}\,\text{لا}^{3} + \frac{5}{12}\,\text{لا}^{2} - \frac{13}{900} = 0$$

سے کسری سر دور کرو ۔

جواب :- $\text{لا}^{4} - 25\,\text{لا}^{3} + 375\,\text{لا}^{2} - 11700 = 0$

**۳۲ ـــ متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں۔** اگر ایک مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متکافی ہوں تو ہم دفعہ ۳۰ کی متماثلہ میں لا کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ درج کرتے ہیں ۔ اس اندراج سے حاصل ہو گا

$$\frac{1}{\text{ما}^{\text{ن}}} + \frac{\text{ب}_1}{\text{ما}^{\text{ن}-1}} + \frac{\text{ب}_2}{\text{ما}^{\text{ن}-2}} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}} \equiv \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ما}^{\text{ن}}}\left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_1}\right)\left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_2}\right)\cdots\cdots\left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}\right)$$

یا

$$\text{ما}^{\text{ن}} + \frac{\text{ب}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_{\text{ن}}}\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ب}_{\text{ن}-2}}{\text{ب}_{\text{ن}}}\,\text{ما}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots + \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_{\text{ن}}}\,\text{ما} + \frac{1}{\text{ب}_{\text{ن}}}$$

$$\equiv \left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_1}\right)\left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_2}\right)\cdots\cdots\left(\text{ما} - \frac{1}{\text{ع}_{\text{ن}}}\right)$$

پس اگر دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ درج کیا جائے اور اسکو $\text{ما}^{\text{ن}}$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ مساوات ملیگی جسکی اصلیں $\text{ع}_1$، $\text{ع}_2$، ...... $\text{ع}_{\text{ن}}$ کے متکافی ہونگی ۔

بعض مساواتیں ایسی ہوتی ہیں جنمیں لا کی بجائے اسکا متکافی درج (63)
کرنے سے انمیں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا ۔ انکو ہم متکافی مساواتیں کہینگے ۔

ابھی ہم نے جو اوپر ثابت کیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ اس جماعت سے متعلق مساوات شرائط ذیل کو پورا کریگی:۔

$$\frac{\text{ب}_{\text{ن}-1}}{\text{ب}_\text{ن}} = \text{ب}_1,\quad \frac{\text{ب}_{\text{ن}-2}}{\text{ب}_\text{ن}} = \text{ب}_2,\ \text{وغیرہ}\quad \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_\text{ن}} = \text{ب}_{\text{ن}-1},\quad \frac{1}{\text{ب}_\text{ن}} = \text{ب}_\text{ن}$$

انمیں سے آخری شرط سے حاصل ہوگا $\text{ب}_\text{ن}^2 = 1$ یعنی $\text{ب}_\text{ن} = \pm 1$۔
اسلئے متکافی مساواتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک جماعت وہ جسمیں $\text{ب}_\text{ن} = +1$ اور دوسری وہ جس میں $\text{ب}_\text{ن} = -1$۔

(۱) پہلی صورت میں روابط ہونگے

$$\text{ب}_{\text{ن}-1} = \text{ب}_1,\quad \text{ب}_{\text{ن}-2} = \text{ب}_2,\ \ldots\ldots,\quad \text{ب}_1 = \text{ب}_{\text{ن}-1}$$

اِن سے پہلی جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں ابتدا اور آخر سے لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی اور ہم علامت ہونگے۔

(۲) دوسری صورت میں یعنی جبکہ $\text{ب}_\text{ن} = -1$ روابط ہونگے

$$\text{ب}_{\text{ن}-1} = -\text{ب}_1,\quad \text{ب}_{\text{ن}-2} = -\text{ب}_2,\ \text{وغیرہ}\ \ldots\ldots\quad \text{ب}_1 = -\text{ب}_{\text{ن}-1}$$

اِن سے دوسری جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنمیں ابتدا اور آخر سے لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی مگر مختلف العلامت ہونگے۔ یہاں یہ بات یاد رہے کہ جب اس جماعت کی کسی مساوات کا درجہ جفت ہو مثلاً $\text{ن} = 2\text{م}$ تو ایک شرط ہو جائیگی $\text{ب}_\text{م} = -\text{ب}_\text{م}$ یعنی $\text{ب}_\text{م} = 0$۔ اس لئے دوسری جماعت کی متکافی مساوات میں جسکا درجہ جفت ہو درمیانی رقم نہیں ہوتی۔

اگر متکافی مساوات کی ایک اصل $\text{ع}$ ہو تو $\frac{1}{\text{ع}}$ بھی اسکی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ یہ استحالہ شدہ مساوات کی اصل ہے اور استحالہ شدہ مساوات دی ہوئی مساوات کے مماثل ہے۔ پس متکافی مساوات کی اصلیں زوجوں $\text{ع}، \frac{1}{\text{ع}}$؛ $\text{ب}، \frac{1}{\text{ب}}$ وغیرہ میں واقع ہوتی ہیں۔ جب مساوات کا درجہ طاق ہو تو

ایک اصل ایسی ہونی چاہئے جو خود اپنی متکافی ہو اور مساوات کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ -ا یا +ا ایسی صورت میں ایک اصل ہوگی بموجب اسکے کہ مساوات پہلی جماعت سے یا دوسری جماعت سے متعلق ہو۔ دونوں صورتوں میں (64)
ہم معلومہ جزو ضربی (لا + ا یا لا - ا) سے تقسیم کر سکتے ہیں اور عمل تقسیم سے جفت درجہ کی متکافی مساوات حاصل ہوگی جو پہلی جماعت سے متعلق ہوگی دوسری جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں $لا^۲ - ۱$ جزو ضربی ہوگا کیونکہ مساوات کو شکل

$$لا^ن - ۱ + ب_۱ لا (لا^{ن-۲} - ۱) + \dots\dots = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

$لا^۲ - ۱$ سے تقسیم کرنے سے اسکو بھی پہلی جماعت کی جفت درجہ کی متکافی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ پس تمام متکافی مساواتوں کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

اور اسلئے پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات کو معیاری مساوات قرار دیا جا سکتا ہے۔

# مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۴ - ۳لا^۳ + ۷لا^۲ + ۵لا - ۲ = ۰$$

کی اصلوں کے متکافی ہوں۔

**جواب:-** $۲م^۴ - ۵م^۳ - ۷م^۲ + ۳م - ۱ = ۰$

۲۔ $لا^۶ + \frac{۵}{۶} لا^۵ - \frac{۲۲}{۳} لا^۴ + \frac{۲۲}{۳} لا^۲ - \frac{۵}{۶} لا - ۱ = ۰$

کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

۳۔ اصلوں کو بقدر ایک دی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا۔

اس قسم کے استحالہ کیلئے ہم کثیر الارقام ف (لا) کے متغیر لا کو ما + ھ میں بدل دیتے ہیں۔ ما میں محصلہ مساوات کی ہر اصل دی ہوئی لا کی مساوات کی ہر اصل سے چھوٹی یا بڑی ہوگی بموجب اسکے کہ ھ مثبت یا منفی ہو۔ محصلہ مساوات ہوگی (دیکھو دفعہ ٦)

$$\text{ف}(\text{ھ}) + \text{فَ}(\text{ھ})\,\text{ما} + \frac{\text{فً}(\text{ھ})}{۲\times۱}\,\text{ما}^{۲} + \cdots\cdots = ۰$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ مشتق تفاعلوں کو راست محسوب کر کے انہیں دی ہوئی مقدار ھ درج کرنا محنت طلب امر ہے۔ اسلئے ہم اس مساوات کو بنانیکا ایک آسان طریقہ بیان کرتے ہیں جو عملی مقاصد کیلئے زیادہ کارآمد و سہولت بخش ہے۔
فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} = ۰$$

(65) اور فرض کرو کہ ما میں تحویل شدہ کثیر الارقام ہے

$$\text{ا}_{۰}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{ما}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}\,\text{ما} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

اب چونکہ ما = لا - ھ اسلئے یہ کثیر الارقام

$$\text{ا}_{۰}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۱} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}-۱}(\text{لا}-\text{ھ}) + \text{ا}_{\text{ن}}$$

کے مماثل ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر دئے ہوئے کثیر الارقام کو لا - ھ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $\text{ا}_{\text{ن}}$ ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$\text{ا}_{۰}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۱}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}-۲}(\text{لا}-\text{ھ}) + \text{ا}_{\text{ن}-۱}$$

اگر اسکو پھر لا - ھ سے تقسیم کیا جائے تو باقی $\text{ا}_{\text{ن}-۱}$ ہوگا اور خارج قسمت ہوگا۔

$$\text{ا}_{۰}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۲} + \text{ا}_{۱}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۳} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}-۲}$$

اس عمل کو جاری رکھکر ہم معمولی حسابی اعمال کی تکرار سے (جو دفعہ ۸ میں بیان ہوئے ہیں) تحویل شدہ مساوات کے سروں $ا_ن$ ، $ا_{ن-۱}$ ، $ا_{ن-۲}$ وغیرہ کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم کر سکتے ہیں۔ آخری سر ا. ' ا. کے مساوی ہوگا۔ کسی آئندہ باب میں یہ معلوم ہوگا کہ عددی مساواتوں کو حل کرنیکا بہترین عملی طریقہ صرف اُس عمل کی توسیع ہے جو ذیل کی مثالوں میں استعمال کیا گیا ہے۔

# مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۷ لا^۲ - ۱۷ لا + ۱۱ = ۰$$

کی اصلوں سے بقدر ۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

عمل جواب بہترین طریقہ پر ذیل سے ظاہر ہے

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۱۷- | ۷ | ۵- | ۱ |
| ۲۰- | ۱۲ | ۴- | ۴ | |
| ۹- | ۵- | ۳ | ۱- | |
| | ۶۰ | ۱۲ | ۴ | |
| | ۵۵ | ۱۵ | ۳ | |
| | | ۲۸ | ۴ | |
| | | ۴۳ | ۷ | |
| | | | ۴ | |
| | | | ۱۱ | |

یہاں دیے ہوئے کثیر الارقام کو اول لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا جس سے باقی (66)
۹- (= $ا_۴$) اور خارج قسمت $لا^۳ - لا^۲ + ۳ لا - ۵$ حاصل ہوا (دیکھو دفعہ ۸) اسکو پھر لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا تو باقی ۵۵ (= $ا_۳$) اور خارج قسمت $لا^۲ + ۳ لا + ۱۵$ حاصل ہوا

پھر تقسیم کرنے سے باقی ۳۴۳ (= ا۲) اور خارج قسمت لا + ۷ اور اس کو تقسیم کرنے سے
ا۱ = ۱۱ اور ا۰ = ۱ ۔ پس مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ہے

ما^۴ + ۱۱ ما^۳ + ۳۴۳ ما^۲ + ۵۵ ما − ۹ = ۰

۲ ـــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

لا^۵ + ۴ لا^۳ − لا^۲ + ۱۱ = ۰

کی اصلوں سے بقدر ۳ کے گھٹی ہوئی ہوں ۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۰ | ۱- | ۴ | ۰ | ۱ |
| ۳۴۲ | ۱۱۴ | ۳۹ | ۹ | ۳ | |
| ۳۵۳ | ۱۱۴ | ۳۸ | ۱۳ | ۳ | |
| | ۳۹۳ | ۹۳ | ۱۸ | ۳ | |
| | ۵۰۷ | ۱۳۱ | ۳۱ | ۶ | |
| | | ۱۷۴ | ۲۷ | ۳ | |
| | | ۳۰۵ | ۵۸ | ۹ | |
| | | | ۳۶ | ۳ | |
| | | | ۹۴ | ۱۲ | |
| | | | | ۱۵ | |

اسلیے استحالہ شدہ مساوات ہے

لا^۵ + ۱۵ لا^۴ + ۹۴ لا^۳ + ۳۰۵ لا^۲ + ۵۰۷ لا + ۳۵۳ = ۰

۳ ـــ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

۴ لا^۵ − ۲ لا^۳ + ۷ لا − ۳ = ۰

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے زیادہ ہوں ۔

اس عمل میں ضارب صریحاً −۲ ہے ۔

جواب: ۔ ۴ ما^۵ − ۴۰ ما^۴ + ۱۵۸ ما^۳ − ۳۰۸ ما^۲ + ۳۰۳ ما − ۱۲۹ = ۰

۴ ـــ مساوات

۳ لا^۴ + ۷ لا^۳ − ۱۵ لا^۲ + لا − ۲ = ۰

کی اصلوں کو بقدر ۷ کے بڑھاؤ۔

**جواب** :- ۳ ما$^{۴}$ - ۷۷ ما$^{۳}$ + ۲۰۷ ما$^{۲}$ - ۲۸۷۶ ما + ۴۰۵۸ = ۰

۵ — مساوات

۵ لا$^{۳}$ - ۱۳ لا$^{۲}$ - ۱۲ لا + ۷ = ۰

کو بقدر ۲۳ کے گھٹاؤ۔

یہاں بہتر یہ ہوگا کہ پہلے اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹایا جائے۔ پھر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹایا جائے۔ اس دوسرے عمل کو ذیل میں واضح کیا گیا ہے جہاں ہر عمل کا اختتام شکستہ خط سے دکھایا گیا ہے۔ (67)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۷ | ۱۲- | ۱۳- | ۵ |
| ۳۴۵۶۰ | ۱۷۴۰ | ۱۰۰ | |
| ۳۴۵۶۷ | ۱۷۲۸ | ۸۷ | |
| ۱۹۱۲۲ | ۳۷۴۰ | ۱۰۰ | |
| ۵۳۶۸۹ | ۵۴۶۸ | ۱۸۷ | |
| | ۹۰۶ | ۱۰۰ | |
| | ۶۳۷۴ | ۲۸۷ | |
| | 951 | 15 | |
| | ۷۳۲۵ | ۳۰۲ | |
| | | 15 | |
| | | ۳۱۷ | |
| | | 15 | |
| | | ۳۳۲ | |

**جواب** :- ۵ ما$^{۳}$ + ۳۳۲ ما$^{۲}$ + ۷۳۲۵ ما + ۵۳۶۸۹ = ۰

## ۳۴ — رقموں کا اخراج

دفعہ گذشتہ کے استحالہ سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مساوات سے کسی مخصوص رقم کو خارج کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے سے

اس کے حل کرنے میں اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے۔ ما کی قوتوں میں استحالہ شدہ مساوات کو ترتیب دینے سے حاصل ہوگا

$$\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ما}^{\text{ن}} + (\text{ن}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۱}})\,\text{ما}^{\text{ن}-\text{۱}} + \left\{\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ھ}^{\text{۲}} + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۲}}\right\}\text{ما}^{\text{ن}-\text{۲}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots = \text{۰}$$

اگر ھ ایسا ہو کہ مساوات $\text{ن}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۱}} = \text{۰}$ کو پورا کرے تو استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم غائب ہوگی۔ اگر ھ ایسا ہو کہ وہ مساوات

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۱}\times\text{۲}}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ھ}^{\text{۲}} + (\text{ن}-\text{۱})\,\text{ا}_{\text{۱}}\,\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۲}} = \text{۰}$$

کی دو اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو استحالہ شدہ مساوات میں تیسری رقم غائب ہوگی۔ چوتھی رقم کا اخراج ھ کے کعبی کے حل پر منحصر ہوگا۔ آخری رقم کو خارج کرنے کے لئے مساوات ف (ھ) = ۰ کو حل کرنا ہوگا جسکے معنی ابتدائی مساوات کو حل کرنیکے ہیں۔

(68)

# مثالیں

۱ — مساوات

$$\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۶}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۴}\,\text{لا} - \text{۷} = \text{۰}$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی دوسری رقم موجود نہ ہو۔

$\text{ن}\,\text{ا}_{\text{۰}}\,\text{ھ} + \text{ا}_{\text{۱}} = \text{۰}$ سے $\text{ھ} = \text{۲}$

اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ۔

**جواب:** — $\text{ما}^{\text{۳}} - \text{۸}\,\text{ما} - \text{۱۵} = \text{۰}$

۲ — مساوات

$$\text{لا}^{\text{۳}} + \text{۸}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} - \text{۵} = \text{۰}$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسمیں دوسری رقم موجود نہ ہو۔

اصلوں کو بقدر ۲ کے زیادہ کرو۔ **جواب:** — $\text{ما}^{\text{۳}} - \text{۲۴}\,\text{ما}^{\text{۲}} + \text{۱۶۵}\,\text{ما} - \text{۵۵} = \text{۰}$

۳ ـــ مساوات

$$لا^{۴} - ۴لا^{۳} - ۱۸لا^{۲} - ۳لا + ۲ = ۰$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسمیں تیسری رقم موجود نہ ہو -

ھ کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$۶ھ^{۲} - ۱۲ھ - ۱۸ = ۰$$ ، جس سے ھ = ۳ ، ھ = -۱

اسس لئے دی ہوئی مساوات کو تحویل کرنیکے دو طریقے ہیں -

اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹانے سے حاصل ہوگا

(۱) $م^{۴} + ۸م^{۳} - ۱۱۱م - ۱۹۶ = ۰$

اصلوں کو بقدر ایک کے بڑہانے سے حاصل ہوگا

(۲) $م^{۴} - ۸م^{۳} + ۱۷م - ۸ = ۰$

## ۳۵ ـــ ثنائی سر - بہت سے جبری اعمال میں کثیر الارقام ف(لا)

کو شکل ذیل میں لکھنا سہولت بخش ہوتا ہے :-

$$ا_{۰}لا^{ن} + ن\,ا_{۱}لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\,ا_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\,ا_{ن-۲}لا^{۲} + ن\,ا_{ن-۱}لا + ا_{ن}$$

جسمیں ہر رقم کا سر حرفی سر کے علاوہ ایک عددی سر پر مشتمل ہے جو $(لا+۱)^{ن}$ کے پھیلاؤ کی متناظر رقم کے سر کے مساوی ہے جب اِسے مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جائے - اس طریقہ پر لکھی ہوئی مساواتوں کی مثالیں دفعہ ۲۷ کے ۱۳ ویں اور ۱۶ ویں سوالات میں دی گئی ہیں - یہ شکل ایسی ہے جسمیں ہر کثیر الارقام کو فوراً تحویل کیا جاسکتا ہے -

اب ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں :-

$$ع_{ن} = ا_{۰}لا^{ن} + ن\,ا_{۱}لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\,ا_{۲}لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ن\,ا_{ن-۱}لا + ا_{ن}$$

یہاں ع لاحقہ ن کے ساتھ ن ویں درجہ کے کثیر الارقام کو تعبیر کرتا ہے جو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا گیا ہو۔

(69) اس لئے ن کو ن-۱، ن-۲ وغیرہ میں بدلنے سے

$$ع_{ن-۱} = ا_۰ لا^{ن-۱} + (ن-۱) ا_۱ لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + (ن-۱) ا_{ن-۲} لا + ا_{ن-۱}$$

$$ع_{ن-۲} = ا_۰ لا^{ن-۲} + (ن-۲) ا_۱ لا^{ن-۳} + \cdots\cdots + (ن-۲) ا_{ن-۳} لا + ا_{ن-۲}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$ع_۳ = ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳$$

$$ع_۲ = ا_۰ لا^۲ + ۲ ا_۱ لا + ا_۲$$

$$ع_۱ = ا_۰ لا + ا_۱$$

$$ع_۰ = ا_۰$$

ثنائی شکل میں رکھنے سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مشتق تفاعلوں کو فوراً لکھا جا سکتا ہے۔ چنانچہ $ع_ن$ کا پہلا مشتق تفاعل صریحاً ہے

$$ن\left\{ا_۰ لا^{ن-۱} + (ن-۱) ا_۱ لا^{ن-۲} + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۲ \times ۱} ا_۲ لا^{ن-۳} + \cdots + ا_{ن-۱}\right\}$$

یعنی ن $ع_{ن-۱}$۔ اس لئے اس طور پر تعبیر شدہ کثیر الارقام کا پہلا مشتق تفاعل ع کے لاحقہ پر اُس قانون کو استعمال کر کے لکھا جا سکتا ہے جو دفعہ ۶ میں متغیر کے قوت نما کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ مثلاً $ع_۴$ کا پہلا مشتق تفاعل اس کو ۴ سے ضرب دیکر اس کے لاحقہ کو بقدر ایک کے گھٹانے سے بنایا جا سکتا ہے۔ اس لئے یہ مشتق تفاعل ۴ $ع_۳$ ہے جسکی تصدیق طالب علم آسانی سے کر سکتا ہے۔

اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ کثیر الارقام $ع_ن$ یعنی

$$ا_۰ لا^ن + ن ا_۱ لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا_۲ لا^{ن-۲} + \cdots\cdots + ن ا_{ن-۱} + ا_ن$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کرنے سے اسکو شکل

$$\text{ا}_\cdot\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}_1\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}_2\,\text{ما}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ما} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{ا}_\cdot ،\ \text{ا}_1 ،\ \text{ا}_2 ،\ \dots\dots\ \text{ا}_{\text{ن}-1} ،\ \text{ا}_{\text{ن}}$$

وہ تفاعل ہیں جو

$$\text{ع}_\cdot ،\ \text{ع}_1 ،\ \text{ع}_2 ،\ \dots\dots ،\ \text{ع}_{\text{ن}-1} ،\ \text{ع}_{\text{ن}}$$

میں لا کی بجائے ھ درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\text{ا}_\cdot = \text{ا}_\cdot ،\ \text{ا}_1 = \text{ا}_\cdot\,\text{ھ} + \text{ا}_1 ،\ \text{ا}_2 = \text{ا}_\cdot\,\text{ھ}^2 + 2\,\text{ا}_1\,\text{ھ} + \text{ا}_2 ،\ \text{وغیرہ}$$

اگر ف (ھ) کے مشتق تفاعلوں کو لاحقوں سے تعبیر کیا جائے جیسا کہ

(70) دفعہ ۶ میں بتایا گیا ہے تو ہم تحویل شدہ تفاعل یعنی ف (ما + ھ) کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں :-

$$\text{ف}(\text{ھ}) + \text{ف}_1(\text{ھ})\,\text{ما} + \frac{\text{ف}_2(\text{ھ})}{1\times 2}\,\text{ما}^2 + \dots\dots + \frac{\text{ف}_{\text{ن}-1}(\text{ھ})}{1\times 2\times\dots(\text{ن}-1)}\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ف}_{\text{ن}}(\text{ھ})}{1\times 2\times\dots\times \text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}}$$

$\text{ع}_{\text{ن}}$ میں لا کی بجائے ھ درج کیا جائے تو ف (ھ) حاصل ہوتا ہے اسلئے وہ $\text{ا}_{\text{ن}}$ کے مساوی ہے - اس کا پہلا مشتق قانون متذکرۂ بالا کی بموجب $\text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}$ ہے - پھر اسکا پہلا مشتق $\text{ن}\,(\text{ن}-1)\,\text{ا}_{\text{ن}-2}$ ہے اور علیٰ ہذا - ان اندراجات کو عمل میں لانے سے نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے جس سے ہم استحالہ شدہ مساوات کو بغیر کسی حسابی عمل کے فوراً لکھ سکتے ہیں -

# مثالیں

۱ — کثیر الارقام

$$\text{ا}_{۰}\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳}$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہو اُسکو معلوم کرو۔

**جواب**:- $\text{ا}_{۰}\text{ما}^{۳} + ۳(\text{ا}_{۰}\text{ھ} + \text{ا}_{۱})\text{ما}^{۲} + ۳(\text{ا}_{۰}\text{ھ}^{۲} + ۲\text{ا}_{۱}\text{ھ} + \text{ا}_{۲})\text{ما}$
$+ \text{ا}_{۰}\text{ھ}^{۳} + ۳\text{ا}_{۱}\text{ھ}^{۲} + ۳\text{ا}_{۲}\text{ھ} + \text{ا}_{۳}$

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ اس نتیجہ کی تصدیق دفعہ ۲۳ میں بتلائے ہوئے حساب کے طریقہ سے کرے جسکو جبری اور نیز عددی مثالوں کی صورت میں استعمال کرنے سے اکثر فائدہ ہوتا ہے۔

۲ — مساوات

$$\text{ا}_{۰}\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ا}_{۳} = ۰$$

سے دوسری رقم خارج کرو۔

اِس کی اصلوں کو بقدر اُس مقدار ھ کے گھٹانا چاہئے جو مساوات

$$\text{ا}_{۰}\text{ھ} + \text{ا}_{۱} = ۰$$

سے حاصل ہو یعنی اصلوں کو بقدر $-\frac{\text{ا}_{۱}}{\text{ا}_{۰}}$ کے گھٹانا چاہئے۔

ھ کی اس قیمت کو $\text{ا}_{۲}$ اور $\text{ا}_{۳}$ میں درج کرنے سے ما میں حاصل ہونیوالی مساوات ہوگی

$$\text{ما}^{۳} + \frac{۳(\text{ا}_{۰}\text{ا}_{۲} - \text{ا}_{۱}^{۲})}{\text{ا}_{۰}^{۲}}\,\text{ما} + \frac{\text{ا}_{۰}^{۲}\text{ا}_{۳} - ۳\text{ا}_{۰}\text{ا}_{۱}\text{ا}_{۲} + ۲\text{ا}_{۱}^{۳}}{\text{ا}_{۰}^{۲}} = ۰$$

۳ — وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $\text{ع}_{\text{ن}} = ۰$ کی دوسری اور تیسری رقمیں ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں ھ کی ایک ہی قیمت کے لئے $\text{ا}_{۱}$ اور $\text{ا}_{۲}$ دونوں کو معدوم ہونا چاہیئے۔ ان سے ھ کو ساقط کر دینے سے ہمیں مطلوبہ شرط ملیگی۔

**جواب :-** ا$_0$ ا$_2$ - ا$_1^2$ = ۰

۴ — مساوات

لا$^3$ + ۶ لا$^2$ + ۱۲ لا - ۱۹ = ۰

سے دوسری رقم خارج کرکے اسکو حل کرو۔

ایک ہی اندراج سے تیسری رقم بھی خارج ہوگی اور حاصل ہوگا

ما$^3$ - ۲۷ = ۰

(71) مطلوبہ اصلیں اس مساوات کی اصلوں میں سے ۲ تفریق کرنے سے حاصل ہونگی۔

۵ — وہ شرط معلوم کروکہ مساوات ع$_ن$ = ۰ کی دوسری اور چوتھی رقمیں ایک ہی اندراج سے خارج ہوسکیں۔

یہاں ھ کی ایک ہی قیمت کے لئے ا$_1$ اور ا$_3$ دونوں کو معدوم ہوجانا چاہیئے۔ اسلئے مساواتوں

ا$_0$ ھ + ا$_1$ = ۰ ، ا$_0$ ھ$^3$ + ۳ ا$_1$ ھ$^2$ + ۳ ا$_2$ ھ + ا$_3$ = ۰

سے ھ کو ساقط کردیا جائے تو مطلوبہ شرط ہوگی

ا$_0^2$ ا$_3$ - ۳ ا$_0$ ا$_1$ ا$_2$ + ۲ ا$_1^3$ = ۰

**نوٹ :-** مساوات درجہ چہارم کے سروں کے درمیان جب یہ شرط پوری ہوتو اسکو مساوات درجہ دوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب دوسری رقم خارج کردی جاتی ہے تو محصلہ مساوات ما$^2$ میں درجہ دوم کی مساوات ہوگی اور ما کی قیمتوں سے لا کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

لا$^4$ + ۱۶ لا$^3$ + ۷۲ لا$^2$ + ۶۴ لا - ۱۲۹ = ۰

کی دوسری رقم خارج کرکے اسکو حل کرو۔

ما میں مساوات ہوگی

ما$^4$ - ۲۴ ما$^2$ - ۱ = ۰

۷ — اسی طرح مساوات

لا$^4$ + ۲۰ لا$^3$ + ۱۴۳ لا$^2$ + ۴۳۰ لا + ۴۶۲ = ۰

کو حل کرو۔

**جواب:-** اصلیں ہونگی ۰، ۱، -۲، -۳، $۵ \pm \sqrt{۳}$

۸۔۔۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $ع_ن = ۰$ کی دوسری اور پانچویں رقمیں ایک ہی استحالہ سے خارج ہو سکیں۔

**جواب:-** $ا_۰^۳ ا_۴ - ۴ ا_۰^۲ ا_۱ ا_۳ + ۶ ا_۰ ا_۱^۲ ا_۲ - ۳ ا_۱^۴ = ۰$

**۳۶۔۔۔ کعبی۔** دفعہ ماسبق کے استحالہ کے سلسلہ میں ہم اس دفعہ اور آیندہ دفعات میں تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں پر غور کرینگے کیونکہ ان کی بحث خاص اہمیت رکھتی ہے۔

مساوات

$$ا_۰ لا^۳ + ۳ ا_۱ لا^۲ + ۳ ا_۲ لا + ا_۳ = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

میں لا کی بجائے ما + ھ درج کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$ا_۰ ما^۳ + ۳ ا_۱ ما^۲ + ۳ ا_۲ ما + ا_۳ = ۰$$

جہاں $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$ کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۳۵ میں بیان ہو چکی ہیں۔

اگر استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم موجود نہ ہو تو

$$ا_۱ = ۰ ، \quad یا \quad ھ = -\frac{ا_۱}{ا_۰}$$

$ا_۲$ اور $ا_۳$ میں ھ کی بجائے یہ قیمت درج کرنے سے دفعہ ۳۵ مثال ۲ (۲۲)
کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ا_۰ ا_۲ = ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲ ، \quad ا_۰^۲ ا_۳ = ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳$$

پس استحالہ شدہ کعبی بغیر دوسری رقم کے، حسب ذیل ہے

$$ما^۳ + \frac{۳}{ا_۰^۲}(ا_۰ ا_۲ - ا_۱^۲) ما + \frac{۱}{ا_۰^۳}(ا_۰^۲ ا_۳ - ۳ ا_۰ ا_۱ ا_۲ + ۲ ا_۱^۳) = ۰$$

سروں کے یہ تفاعل جبری مساواتوں کے نظریہ میں اسقدر اہمیت رکھتے ہیں کہ اِنکو واحد حروف سے تعبیر کرنے میں بڑی سہولت ہوگی۔ اسلئے ہم ترقیم

$$\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2 \equiv \text{ھ}، \quad \text{ا}_0^2\text{ا}_3 - ۳\,\text{ا}_0\text{ا}_1\text{ا}_2 + ۲\,\text{ا}_1^3 \equiv \text{گ}$$

کو اختیار کرتے ہیں اور استحالہ شدہ مساوات کو شکل

$$\text{م}^3 + \frac{۳\,\text{ھ}}{\text{ا}_0^2}\,\text{م} + \frac{\text{گ}}{\text{ا}_0^3} = 0، \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

میں لکھتے ہیں۔

اگر اس مساوات کی اصلوں کو $\text{ا}_0$ سے ضرب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جائیگی

$$\text{ی}^3 + ۳\,\text{ھ}\,\text{ی} + \text{گ} = 0، \qquad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہ شکل ایسی ہے جو کعبی کی بحث میں زیادہ سہولت پیدا کر دیگی۔ اس مساوات کے پہلے رکن میں جو متغیری ہے وہ $\text{ا}_0\,\text{م}$ یا $\text{ا}_0\text{لا} + \text{ا}_1$ کے مساوی ہے۔

ابتدائی کعبی کو $\text{ا}_0^2$ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(\text{ا}_0\text{لا} + \text{ا}_1)^3 + ۳\,\text{ھ}\,(\text{ا}_0\text{لا} + \text{ا}_1) + \text{گ}$$

کے مماثل ہو جاتا ہے جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کر سکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو استحالہ شدہ مساوات (۲) کی اصلیں ہونگی

$$\text{عہ} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}، \quad \text{بہ} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}، \quad \text{جہ} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}$$

اب چونکہ

$$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = -\frac{۳\,\text{ا}_1}{\text{ا}_0}$$

اسلئے اِن اصلوں کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:—

$$\tfrac{1}{3}(\text{۲عہ}-\text{بہ}-\text{جہ}),\ \tfrac{1}{3}(\text{۲بہ}-\text{جہ}-\text{عہ}),\ \tfrac{1}{3}(\text{۲جہ}-\text{عہ}-\text{بہ})$$

استحالہ شدہ مساوات کے ذریعہ ہم ابتدائی کعبی کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں

$$\Sigma\,(\text{۲عہ}-\text{بہ}-\text{جہ})(\text{۲بہ}-\text{جہ}-\text{عہ}),$$

$$(\text{۲عہ}-\text{بہ}-\text{جہ})(\text{۲بہ}-\text{جہ}-\text{عہ})(\text{۲جہ}-\text{عہ}-\text{بہ})$$

کی قیمتیں فوراً لکھ سکتے ہیں۔ موخر الذکر تفاعل کی قیمت دفعہ ۲۷ مثال ۱۵ میں محصلہ قیمت کے مماثل ہو گی۔

اس سلسلہ میں عام مساوات کے متعلق ہم ایک اہم اصول بیان کرینگے۔ وہ یہ ہے کہ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ کا کوئی متشاکل تفاعل جو صرف انکے فرقوں کا تفاعل ہو اُن سروں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے جو استحالہ شدہ مساوات میں جسمیں دوسری رقم موجود نہ ہو واقع ہوئے ہیں۔ یہ بات ظاہر ہے کیونکہ استحالہ شدہ مساوات کی کوئی دو اصلوں عہَ، بہَ کا فرق ابتدائی مساوات کی اصلوں عہ، بہ کے فرق کے مساوی ہے اور اصلوں عہَ، بہَ، جہَ، ضہَ وغیرہ کا کوئی متشاکل تفاعل استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً کعبی کی صورت میں اصلوں کے تمام متشاکل تفاعل جنمیں صرف اصلوں کے فرق داخل ہوں ا، ھ، گ کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں۔ اس اصول کی مثالیں دفعہ ۴۲ کی مثالوں میں ملینگی۔

**۳۷ — چار درجی** — اِس صورت میں استحالہ شدہ مساوات، دوسری رقم کے بغیر حسب ذیل ہو گی

$$\text{ا}_0\,\text{م}^4+6\,\text{ا}_2\,\text{م}^2+4\,\text{ا}_3\,\text{م}+\text{ا}_4=0$$

جہاں $\text{ا}_2$ اور $\text{ا}_3$ کی قیمتیں وہی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں دی گئی ہیں اور جہاں $\text{ا}_4$ مساوات

$$\text{ا}_0^3\,\text{ل}_4 = \text{ا}_0^3\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_0^2\text{ا}_1\text{ا}_3 + 6\,\text{ا}_0\text{ا}_1^2\text{ا}_2 - 3\,\text{ا}_1^4$$

سے حاصل ہوگا۔

اس لئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$\text{م}^4 + \frac{6}{\text{ا}_0^2}\text{ه}\,\text{م}^2 + \frac{4}{\text{ا}_0^3}\text{گ}\,\text{م} + \frac{1}{\text{ا}_0^4}\left(\text{ا}_0^3\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_0^2\text{ا}_1\text{ا}_3 + 6\,\text{ا}_0\text{ا}_1^2\text{ا}_2 - 3\,\text{ا}_1^4\right) = 0$$

اگر ہم چاہیں تو اس مساوات کی رقم مطلق کو ه اور گ کی طرح
ایک حرف سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہمیں سروں کے تین تفاعل
ملینگے جنکی رقوم میں چار درجی کی اصلوں کے فرقوں کے تمام متشاکل
تفاعلوں کو بیان کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اس رقم کو ه اور سروں کے ایک دوسرے (74)
تفاعل سے ترکیب یافتہ سمجھنا زیادہ سہولت بخش ہے۔ اس دوسرے ترکیبی
تفاعل کو طریقہ ذیل پر معلوم کیا جا سکتا ہے:۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ا}_0^3\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_0^2\text{ا}_1\text{ا}_3 + 6\,\text{ا}_0\text{ا}_1^2\text{ا}_2 - 3\,\text{ا}_1^4 \equiv \text{ا}_0^2\left(\text{ا}_0\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_1\text{ا}_3 + 3\,\text{ا}_2^2\right) - 3\left(\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2\right)^2$$

ایک متماثلہ ہے۔

اس میں ا.، ه اور سروں کا دوسرا تفاعل یعنی

$$\text{ا}_0\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_1\text{ا}_3 + 3\,\text{ا}_2^2$$

شامل ہیں۔ یہ تفاعل چار درجی کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔
اسکو اگر ہم ع سے تعبیر کریں تو

$$\text{ا}_0^3\text{ا}_4 - 4\,\text{ا}_0^2\text{ا}_1\text{ا}_3 + 6\,\text{ا}_0\text{ا}_1^2\text{ا}_2 - 3\,\text{ا}_1^4 \equiv \text{ا}_0^2\,\text{ع} - 3\,\text{ه}^2$$

اب استحالہ شدہ مساوات کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{م}^4 + \frac{6\,\text{ه}}{\text{ا}_0^2}\text{م}^2 + \frac{4\,\text{گ}}{\text{ا}_0^3}\text{م} + \frac{\text{ا}_0^2\,\text{ع} - 3\,\text{ه}^2}{\text{ا}_0^4} = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

اس مساوات کی اصلوں کو $ا_0$ سے ضرب دیا جائے جیسا کہ دفعہ ۳۶ کے کعبی کی صورت میں کیا گیا ہے تو

$$ی^{۴} + ۶ھ\,ی^{۲} + ۴گ\,ی + ا_0^{۲}ع - ۳ھ^{۲} = ۰ \qquad (۲)$$

چار درجی کا جبری حل دریافت کرنے میں اس کی یہ شکل آسانی پیدا کرتی ہے اِس میں متغیر وہی ہے جو کعبی کی صورت میں تھا یعنی $ا_0لا + ا_1$ کیونکہ ابتدائی چار درجی تفاعل کو $ا_0^{۳}$ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(ا_0لا + ا_1)^{۴} + ۶ھ(ا_0لا + ا_1)^{۲} + ۴گ(ا_0لا + ا_1) + ا_0^{۲}ع - ۳ھ^{۲}$$

کے مماثل ہوتا ہے ۔

ابتدائی چار درجی مساوات کی اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کو جو صرف ان کے فرقوں سے بنا ہو $ا_0$، ھ، گ اور ع کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو یہ بہ آسانی معلوم کیا جا سکتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات (۱) کی اصلیں ہیں

$$\tfrac{۱}{۴}(۳عہ - بہ - جہ - ضہ)،\ \tfrac{۱}{۴}(۳بہ - جہ - ضہ - عہ)،\ \tfrac{۱}{۴}(۳جہ - ضہ - عہ - بہ)،\ \tfrac{۱}{۴}(۳ضہ - عہ - بہ - جہ)$$

اِنکا مجموعہ = ۰، انہیں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ = $\frac{۶ھ}{ا_0^{۲}}$، اِن میں سے

تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ = $\frac{-۴گ}{ا_0^{۳}}$، اور ان سب کے مسلسل (75)

حاصل ضرب کے لئے مساوات ہے

$$ا_0^{۴}(۳عہ - بہ - جہ - ضہ)(۳بہ - جہ - ضہ - عہ)(۳جہ - ضہ - عہ - بہ)(۳ضہ - عہ - بہ - جہ) = ۲۵۶(ا_0^{۲}ع - ۳ھ^{۲})$$

سروں کا ایک اور تفاعل ہے جو چار درجی کی بحث میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور جسے ہم اب بیان کرینگے ۔ یہ وہ تفاعل ہے جس کا ذکر دفعہ ۲۷ مثال ۱۸ میں ہو چکا ہے یعنی

$$ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۰ ا_۳^۲ - ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۲^۳$$

اسکو ہم ج سے تعبیر کرینگے۔ جس مثال کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل اصلوں کے فرقوں کا تفاعل ہے۔ اِس لئے اسے ا، ھ، گ اور ع کی رقوم میں بیان ہو جانا چاہیئے اور فی الحقیقت ہمیں متماثلہ ملتی ہے

$$ا_۰^۳ ج = ا_۰ ھ ع - گ^۲ - ۴ ھ^۳$$

جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کر سکتا ہے۔

یا اس ربط کو اس طریقہ سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے:۔ جب سِروں $ا_۰$، $ا_۱$ وغیرہ کا کوئی تفاعل اصلوں کے فرقوں کے تفاعل کی صورت میں بیان ہو سکے تو سِروں کا ایسا تفاعل اُس استحالہ سے غیر متغیر رہیگا جو مساوات سے دوسری رقم کو خارج کر دیتا ہے۔ پس اسکی قیمت غیر متغیر رہتی ہے جب ہم $ا_۱$ کو صفر میں، $ا_۲$ کو $\text{ا}_۲$ میں، $ا_۳$ کو $\text{ا}_۳$ میں، وغیرہ بدلتے ہیں۔ پس

$$ا_۰ ا_۲ ا_۴ + ۲ ا_۱ ا_۲ ا_۳ - ا_۰ ا_۳^۲ - ا_۱^۲ ا_۴ - ا_۲^۳ \equiv ا_۰ \text{ا}_۲ \text{ا}_۴ - ا_۰ \text{ا}_۳^۲ - \text{ا}_۲^۳$$

اس میں $\text{ا}_۲$، $\text{ا}_۳$، $\text{ا}_۴$ کی بجائے انکی قیمتیں ھ، گ، ع کی رقوم میں درج کرنے سے ہم بہ آسانی متذکرہ بالا متماثلہ حاصل کر لیتے ہیں جس کو عام طور پر شکل

$$گ^۲ + ۴ ھ^۳ \equiv ا_۰^۲ (ھ ع - ا_۰ ج)$$

میں لکھا جائیگا۔

**۳۸ ۔ ہم رسم ( Homographic ) استحالہ۔** کسی کثیر الارقام کا وہ استحالہ جس پر دفعہ ۳۳ میں غور کیا گیا ہے حسب ذیل استحالہ کی ایک خاص صورت ہے جسمیں لا نئے متغیر ما کے ساتھ ربط

$$ما = \frac{ل لا + م}{ل' لا + م'}$$

رکھتا ہے۔

اگر لہ = ا، مہ = - ھ، لہَ = ۰، مہَ = ا تو ما = لا - ھ جیسا کہ دفعہ ۲۳ میں فرض کیا گیا تھا۔ لا کو ما کی رقوم میں حل کریں تو

$$\text{لا} = \frac{\text{مہ} - \text{مہَ ما}}{\text{لہَ ما} - \text{لہ}}$$

اس قیمت کو دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے درج کیا جاسکتا ہے (76)
اوراس طرح ما میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل کیجاسکتی ہے۔

فرض کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ ہیں اور انکے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں عہَ، بہَ، جہَ، وغیرہ ہیں تو مساواتوں

$$\text{عہَ} = \frac{\text{لہ عہ} + \text{مہ}}{\text{لہَ عہ} + \text{مہَ}}،\quad \text{بہَ} = \frac{\text{لہ بہ} + \text{مہ}}{\text{لہَ بہ} + \text{مہَ}}،\quad \text{وغیرہ}$$

سے ربط

$$\text{عہَ} - \text{بہَ} = \frac{(\text{لہ مہَ} - \text{لہَ مہ})(\text{عہ} - \text{بہ})}{(\text{لہَ عہ} + \text{مہَ})(\text{لہَ بہ} + \text{مہَ})}$$

بہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ علیٰ ہذا اصلوں کے کسی دوسرے زوج کیلئے۔ اگر ہم ابتدائی مساوات کی چار اصلیں اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی چار اصلیں لیں تو ربط ملیگا

$$\frac{(\text{عہَ} - \text{بہَ})(\text{جہَ} - \text{ضہَ})}{(\text{عہَ} - \text{جہَ})(\text{بہَ} - \text{ضہَ})} = \frac{(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})}{(\text{عہ} - \text{جہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})}$$

پس اگر مجوزہ مساوات کی اصلیں اُن فاصلوں کو تعبیر کریں جو ایک خط مستقیم پر کے چند نقطوں اور اسی خط پر کے ایک ثابت مبدا کے درمیان ہیں تو استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں نقطوں کے ایک متناظر نظام کے فاصلوں کو تعبیر کرینگی اور ان دونوں نظاموں میں یہ ربط ہوگا کہ ایک نظام کے کسی چار کی "غیر موسیقی نسبت" وہی ہوگی جو دوسرے نظام میں

اسکے چار مزدوجوں کی ہے - اسی خاصیت کی بنا پر ہم اس استحالہ کو ہم رسم استحالہ کہینگے -

یہ بات یاد رہے کہ زیر بحث استحالہ جس میں متغیروں لا اور ما میں

ا لا ما + ب لا + ج ما + د = ۰

کی شکل کا ربط ہے استحالہ کی عام سے عام شکل ہے جس سے کسی متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے -

## ۳۹ - متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ استحالہ -

فرض کرو کہ ایک مساوات کو ایک دوسری مساوات میں تحویل کرنا مطلوب ہے جسکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے دئے ہوئے منطق تفاعل ہوں - فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل فہ (عہ، بہ، جہ، ....) ہے جہاں فہ میں تمام اصلیں داخل ہو سکتی ہیں یا اصلوں کی کوئی سی تعداد - ہم اصلوں کے تمام ممکن اجتماع بہ طرز فہ (عہ بہ جہ)، فہ (عہ بہ ضہ)، وغیرہ بناتے ہیں اور استحالہ شدہ مساوات کو شکل (۷۷)

{ما - فہ (عہ بہ جہ .....)} {ما - فہ (عہ بہ ضہ ....)} ..... = ۰

میں لکھتے ہیں -

جب اس حاصل ضرب کو پھیلایا جاتا ہے تو ما کے متواتر سر دی ہوئی مساوات کی اصلوں عہ، بہ، جہ، وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکینگے -

## مثالیں

۱ — لا$^{۳}$ + ف لا$^{۲}$ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں - وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں عہ$^{۲}$، بہ$^{۲}$، جہ$^{۲}$ ہوں -

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ما}^3 + \text{ف}\,\text{ما}^2 + \text{ق}\,\text{ما} + \text{ر} = ۰$$

تب $-\text{ف} = \text{ع}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2$، $\text{ق} = \Sigma\,\text{ع}^2\text{ب}^2$، $-\text{ر} = \text{ع}^2\text{ب}^2\text{ج}^2$

اب دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں $\Sigma\,(\text{ع}^2)^2$، $\Sigma\,(\text{ع}^2)^2(\text{ب}^2)^2$، $(\text{ع}^2)^2(\text{ب}^2)^2(\text{ج}^2)^2$ کو معلوم کرنا ہے۔ ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$\Sigma\,(\text{ع}^2)^2 = \text{ف}^2 - ۲\text{ق}،\quad \Sigma\,(\text{ع}^2)^2(\text{ب}^2)^2 = \text{ق}^2 - ۲\text{ف}\,\text{ر}،\quad (\text{ع}^2)^2(\text{ب}^2)^2(\text{ج}^2)^2 = \text{ر}^2$$

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$\text{ما}^3 - (\text{ف}^2 - ۲\text{ق})\,\text{ما}^2 + (\text{ق}^2 - ۲\text{ف}\,\text{ر})\,\text{ما} - \text{ر}^2 = ۰$$

۲ — اسی صورت میں وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $\text{ع}^3$، $\text{ب}^3$، $\text{ج}^3$ ہوں؟

جواب:- $\text{ما}^3 + (\text{ف}^3 - ۳\text{ف}\,\text{ق} + ۳\text{ر})\,\text{ما}^2 + (\text{ق}^3 - ۳\text{ف}\,\text{ق}\,\text{ر} + ۳\text{ر}^2)\,\text{ما} + \text{ر}^3 = ۰$

۳ — اگر مساوات

$$\text{لا}^4 + \text{ف}\,\text{لا}^3 + \text{ق}\,\text{لا}^2 + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$$

کی اصلیں ع، ب، ج، ض ہوں تو ایسی مساوات بناؤ جسکی اصلیں $\text{ع}^2$، $\text{ب}^2$، $\text{ج}^2$، $\text{ض}^2$ ہوں۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$\text{ما}^4 + \text{ف}\,\text{ما}^3 + \text{ق}\,\text{ما}^2 + \text{ر}\,\text{ما} + \text{س} = ۰$$

تب $-\text{ف} = \Sigma\,\text{ع}^2$، $\text{ق} = \Sigma\,\text{ع}^2\text{ب}^2$، $-\text{ر} = \Sigma\,\text{ع}^2\text{ب}^2\text{ج}^2$،
$\text{س} = \text{ع}^2\text{ب}^2\text{ج}^2\text{ض}^2$

دفعہ ۲۷ کی مثالوں ۸، ۱ سے مقابلہ کرو۔

جواب:- $\text{ما}^4 - (\text{ف}^2 - ۲\text{ق})\,\text{ما}^3 + (\text{ق}^2 - ۲\text{ف}\,\text{ر} + ۲\text{س})\,\text{ما}^2 - (\text{ر}^2 - ۲\text{ق}\,\text{س})\,\text{ما} + \text{س}^2 = ۰$

۴ — اگر $\text{ا}_0\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$
کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں لہ، مہ، نہ یعنی
$\text{بہ جہ} + \text{عہ ضہ}$، $\text{جہ عہ} + \text{بہ ضہ}$، $\text{عہ بہ} + \text{جہ ضہ}$
ہوں — دیکھو دفعہ ۲۷، مثال ۱۷۔

جواب:- $\text{ما}^3 - \frac{6\,\text{ا}_2}{\text{ا}_0}\,\text{ما}^2 + \frac{4}{\text{ا}_0^2}\left(4\,\text{ا}_1\text{ا}_3 - \text{ا}_0\text{ا}_4\right)\text{ما}$
$- \frac{8}{\text{ا}_0^3}\left(2\,\text{ا}_0\text{ا}_3^2 - 3\,\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_4 + 2\,\text{ا}_1^2\text{ا}_4\right) = 0$

۵ — اگر مثال ۴ کے محصلہ کعبی کی اصلوں کو $\frac{1}{2}\text{ا}_0$ سے ضرب دیا جائے (78)
اور پھر دوسری رقم کو خارج کیا جائے تو ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے
$\text{ی}^3 - \text{غ}\,\text{ی} + 2\,\text{جے} = 0$

## ۴۰ — وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلونکی کوئی قوتیں ہوں۔

گزشتہ دفعہ میں بیان کئے ہوئے متشاکل تفاعلوں کے طریقہ سے یہ استحالہ اکثر محنت طلب ہوتا ہے۔ اس سے زیادہ آسان طریقہ جسمیں صرف عمل ضرب کو دخل ہے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کا انحصار ثنائی مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - 1 = 0$ کے حل کے علم پر ہے جسپر باب آئندہ میں بحث کیجائے گی۔ عام طریق عمل امثلہ ذیل کی مثالوں سے کافی طور پر واضح ہو جائیگا جہاں اس طریقہ کو دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں پر استعمال کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات
$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$

کی اصلوں کے مربع ہوں ۔

اس استحالہ کو عمل میں لانے کے لئے متماثلہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}} \equiv (\text{لا} - \text{ع}_1)(\text{لا} - \text{ع}_2)\ldots(\text{لا} - \text{ع}_{\text{ن}})$$

میں لا کی بجائے ۔ لا درج کرو تو ہمیں حاصل ہوگا ( دفعہ ۳۰ کی طرح )

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} - \ldots\ldots \pm \text{ب}_{\text{ن}-1}\,\text{لا} \mp \text{ب}_{\text{ن}} = (\text{لا} + \text{ع}_1)(\text{لا} + \text{ع}_2)\ldots(\text{لا} + \text{ع}_{\text{ن}})$$

ضرب دینے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \text{ب}_4\,\text{لا}^{\text{ن}-4} + \ldots)^2 - (\text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_3\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \ldots)^2$$

$$\equiv (\text{لا}^2 - \text{ع}_1^2)(\text{لا}^2 - \text{ع}_2^2)\ldots\ldots(\text{لا}^2 - \text{ع}_{\text{ن}}^2)$$

یہ ظاہر ہے کہ اس متماثلہ کے پہلے رکن کو پھیلایا جائے تو پھیلاؤ میں لا کی صرف جفت قوتیں داخل ہونگی اس لئے ہم $\text{لا}^2$ کی بجائے ما رکھ سکتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ما}^{\text{ن}} + (2\text{ب}_2 - \text{ب}_1^2)\,\text{ما}^{\text{ن}-1} + (\text{ب}_2^2 - 2\text{ب}_1\text{ب}_3 + 2\text{ب}_4)\,\text{ما}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots$$

$$\equiv (\text{ما} - \text{ع}_1^2)(\text{ما} - \text{ع}_2^2)\ldots\ldots(\text{ما} - \text{ع}_{\text{ن}}^2)$$

اسکے پہلے رکن کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ملیگی ۔

**نوٹ** :۔ اِس استحالہ کا فائدہ یہ ہے کہ ہم اکثر صورتوں میں دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد کی انتہا متعین کر سکینگے ۔ کیونکہ ایک حقیقی اصل کا مربع ہمیشہ مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے استحالہ شدہ مساوات کی جتنی اصلیں مثبت ہونگی اِنسے زیادہ دی ہوئی مساوات کی اصلیں حقیقی نہیں ہو سکتیں ۔

۲ ۔۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^3 - \text{لا}^2 + 8\,\text{لا} - 6 =$$

کی اصلوں کے مربع ہوں ۔

**جواب** :- $ما^{۳} + ۱۵ ما^{۲} + ۵۲ ما - ۳۶ = ۰$ ۔

موخرالذکر مساوات میں ڈیکارٹ کے قانون علامت سے ایک سے زیادہ مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں اس لئے قبل الذکر کی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

۳ ـــ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات (79)

$$لا^{۵} + لا^{۳} + لا^{۲} + ۲ لا + ۳ = ۰$$

کی اصلوں کے مُربع ہوں ۔

**جواب** :- $ما^{۵} + ۲ ما^{۴} + ۵ ما^{۳} + ۳ ما^{۲} - ۲ ما - ۹ = ۰$ ۔

ڈیکارٹ کے قانون علامت سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی چار اصلیں خیالی ہونی چاہئیں ۔

۴ ـــ مثال ۱ کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثالوں ۱ اور ۳ کی تصدیق کرو۔

۵ ـــ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے مکعب ہوں ۔

یہ معلوم رہے کہ مثال ۱ کے عمل میں ہم نے دئے ہوئے تفاعل ف (لا) کو ف (-لا) سے ضرب دیا ہے ۔ اِن تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ اس طرح حاصل کئے گئے ہیں کہ مساوات $لا^{۲} - ۱ = ۰$ کی دونوں اصلوں سے لا کو ضرب دیا گیا ہے۔ موجودہ صورت میں ہمیں ف (لا)، ف (سہ لا)، ف (سہ$^{۲}$ لا) کو باہم ضرب دینا چاہئیے۔ یہاں اِن تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ مساوات $لا^{۳} - ۱ = ۰$ کی اصلوں سے لا کو ضرب دینے پر حاصل ہوتے ہیں ۔ استحالہ کو ذیل کے طریقہ پر بہ آسانی عمل میں لایا جا سکتا ہے :-

کثیر الارقام ف (لا) کو شکل

$$(ب_{ن} + ب_{ن-۳} لا^{۳} + \ldots) + لا (ب_{ن-۱} + ب_{ن-۴} لا^{۳} + \ldots) + لا^{۲} (ب_{ن-۲} + ب_{ن-۵} لا^{۳} + \ldots)$$

میں لکھو جسکو ہم اختصاراً

ف + لاق + لا$^{2}$ ر

سے تعبیر کرینگے جہاں ف، ق، ر سب کے سب لا$^{3}$ کے تفاعل ہیں۔

اب

ف + لاق + لا$^{2}$ ر ≡ (لا − ع$_{1}$) (لا − ع$_{2}$) .... (لا − ع$_{ن}$) (۱)

اس متماثلہ میں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے سہ لا اور سہ$^{2}$ لا رکھا جائے تو

ف + سہ لاق + سہ$^{2}$ لا$^{2}$ ر ≡ (سہ لا − ع$_{1}$) (سہ لا − ع$_{2}$) ... (سہ لا − ع$_{ن}$) (۲)

ف + سہ$^{2}$ لاق + سہ لا$^{2}$ ر ≡ (سہ$^{2}$ لا − ع$_{1}$) (سہ$^{2}$ لا − ع$_{2}$) ... (سہ$^{2}$ لا − ع$_{ن}$) (۳)

کیونکہ ف، ق، ر غیر متغیر رہتے ہیں اسوجہ سے کہ وہ لا$^{3}$ کے تفاعل ہیں۔

اب (۱)، (۲)، (۳) کو باہم ضرب دو اور دفعہ ۲۶ کے نتیجوں کو استعمال کرو تو

ف$^{3}$ + لا$^{3}$ق$^{3}$ + لا$^{6}$ ر$^{3}$ − ۳ لا$^{3}$ ف ق ر ≡ (لا$^{3}$ − ع$_{1}^{3}$) (لا$^{3}$ − ع$_{2}^{3}$) ... (لا$^{3}$ − ع$_{ن}^{3}$)

اس متماثلہ کے پہلے رکن میں لا کی قوتیں صرف ۳ کا ضعف ہیں اسلئے ہم لا$^{3}$ کی بجائے ما درج کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جائیگی۔

۶۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں مساوات

لا$^{4}$ − لا$^{3}$ + ۲ لا$^{2}$ + ۳ لا + ۱ = ۰

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب:- ما$^{4}$ + ۱۲ ما$^{3}$ + ۵۰ ما$^{2}$ + ۶ ما + ۱ = ۰

۷۔ مثال ۵ کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثال ۲ کی تصدیق کرو۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

ا لا$^{3}$ + ۳ ب لا$^{2}$ + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب:- ا$^{3}$ ما$^{3}$ + ۳ (ا$^{2}$ د + ۹ ب$^{3}$ − ۹ ا ب ج) ما$^{2}$
+ ۳ (ا د$^{2}$ + ۹ ج$^{3}$ − ۹ ب ج د) ما + د$^{3}$ = ۰

**۴۱ — استحالہ کی عام صورت** — استحالہ کے عام مسئلہ میں ہمیں (80)
ما میں ایک نئی مساوات بنانی ہوگی جس کی اصلیں دی ہوی مساوات ف(لا)=۰ کی اصلوں کے ساتھ ایک دیا ہوا ربط فہ(لا، ما)=۰ رکھیں — ایسی صورت میں استحالہ شدہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ دی ہوئی مساوات میں لا کی وہ قیمت ما کی رقوم میں درج کیجائے جو ربط فہ(لا، ما)=۰ سے حاصل ہو — یا بہ الفاظ دیگر دونوں مساواتوں ف(لا)=۰، اور فہ(لا، ما)=۰ سے لا ساقط کر دیا جائے — مثلاً فرض کرو کہ ایسی مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں مساوات

لا$^3$ ـ ف لا$^2$ + ق لا ـ ر = ۰

کی اصلوں (عہ، بہ، جہ) میں سے دو دو اصلوں کے مجموعے ہوں —
یہاں

ما = بہ + جہ = عہ + بہ + جہ ـ عہ = ف ـ عہ

مساوات فہ(لا، ما)=۰ اس صورت میں ما = ف ـ لا ہے کیونکہ جب لا قیمت عہ اختیار کرتا ہے تو ما مجوزہ قیمتوں میں سے ایک قیمت اختیار کرتا ہے اور جب لا دوسری قیمتیں بہ اور جہ اختیار کرتا ہے تو ما دوسری مجوزہ قیمتیں اختیار کرتا ہے — اس لئے دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ف ـ ما درج کرنے سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے —

## مثالیں

۱ — اگر کعبی

لا$^3$ ـ ف لا$^2$ + ق لا ـ ر = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

بہ جہ + ۱/عہ ، جہ عہ + ۱/بہ ، عہ بہ + ۱/جہ

یہاں

ما = بہ جہ + $\frac{1}{\text{عہ}}$ = $\frac{\text{عہ بہ جہ} + 1}{\text{عہ}}$ = $\frac{1 + \text{ر}}{\text{عہ}}$

یعنے دیا ہوا ربط لا ما = ۱ + ر ہے۔ اس لئے ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے $\frac{1 + \text{ر}}{\text{ما}}$ درج کرنے سے استحالہ شدہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

**جواب:**— ر ما$^{3}$ − ق(۱ + ر) ما$^{2}$ + ف(۱ + ر)$^{2}$ ما − (۱ + ر)$^{3}$ = ۰

۲— اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

عہ بہ + عہ جہ، عہ بہ + بہ جہ، بہ جہ + عہ جہ

ہوں۔

لا کی بجائے $\frac{\text{ر}}{\text{ق} - \text{ما}}$ درج کرو۔

**جواب:**— ما$^{3}$ − ۲ق ما$^{2}$ + (ف ر + ق$^{2}$) ما + ر$^{2}$ − ف ق ر = ۰

(81) ۳— اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$\frac{\text{عہ}}{\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ}}$، $\frac{\text{بہ}}{\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ}}$، $\frac{\text{جہ}}{\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ}}$

ہوں۔

لا کی بجائے $\frac{\text{ف ما}}{1 + 2\,\text{ما}}$ درج کرو۔

**جواب:**— (ف$^{3}$ − ۴ ف ق + ۸ ر) ما$^{3}$

+ (ف$^{3}$ − ۴ف ق + ۱۲ر) ما$^{2}$ + (۶ر − ف ق) ما + ر = ۰

۴— اگر کعبی

ا لا$^{3}$ + ۳ ب لا$^{2}$ + ۳ ج لا + د = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ ہم رسم استحالہ

ا لا ما + ب (لا + ما) + ج = ۰

سے ما میں ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں

(به جه − عه^۲) / (به + جه − ۲ عه) ، (جه عه − به^۲) / (جه + عه − ۲ به) ، (عه به − جه^۲) / (عه + به − ۲ جه)

ہیں ۔

## ۴۲ ــ کعبی کی مُربع دار فرقوں کی مساوات

ــ دفعہ ماسبق میں ہم نے جس استحالہ کا ذکر کیا ہے اس کو اب ہم ایک اہم مسئلہ پر یعنی اُس مساوات کے بنانے میں استعمال کرینگے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں ۔

پہلے ہم کعبی

لا^۳ + ق لا + ر = ۰ ............. (۱)

کے لئے جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے اس قسم کا عمل کرینگے اور ہم جانتے ہیں کہ عام مساوات کو شکل (۱) میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ اسکی اصلیں عه ، به ، جه ہیں ۔ ما میں وہ مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں

(به − جه)^۲ ، (جه − عه)^۲ ، (عه − به)^۲

ہوں ۔

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۳۹ کا طریقہ اس عام مسئلہ کو حل کرنے میں یعنی ایسی مساوات کے بنانے میں جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ جب حاصل ضرب

{ما − (عه۱ − عه۲)^۲}{ما − (عه۱ − عه۳)^۲}.....{ما − (عه۲ − عه۳)^۲}......

معلوم ہو جائے تو ما کی متواتر قوتوں کے سر عه۱ ، عه۲ ، عه۳ ...... وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے سروں کی رقوم میں

(82) بیان ہو سکینگے - لیکن موجودہ مثال میں دفعہ ۱۴ کے طریقہ سے مطلوبہ مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہوتی ہے - اس مساوات کو ہم اختصاراً مجوزہ مساوات کی "مربع دار فرقوں کی مساوات" کہینگے - ما کو استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی رکھنے سے مثلاً $\text{ما} = (\text{بہ} - \text{جہ})^2$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = (\text{بہ} - \text{جہ})^2 = \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{عہ}^2 - \frac{\text{۲ عہ بہ جہ}}{\text{عہ}}$$

لیکن $\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 = -\text{۲ق}$ ، $\text{عہ بہ جہ} = -\text{ر}$

اسلئے دفعہ ۱۴ کی مساوات $\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما}) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$\text{ما} = -\text{۲ق} - \text{لا}^2 + \frac{\text{۲ر}}{\text{لا}}$$

یا

$$\text{لا}^3 + (\text{ما} + \text{۲ق})\,\text{لا} - \text{۲ر} = ۰$$

دی ہوئی مساوات کو اس میں سے تفریق کیا جائے تو

$$(\text{ما} + \text{ق})\,\text{لا} - \text{۳ر} = ۰ \quad \text{یعنی} \quad \text{لا} = \frac{\text{۳ر}}{\text{ما} + \text{ق}}$$

پس ما میں استحالہ شدہ مساوات ہو گی

$$\text{ما}^3 + \text{٦ق}\,\text{ما}^2 + \text{۹ق}^2\,\text{ما} + \text{۴ق}^3 + \text{۲۷ر}^2 = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر وہ مساوات بنانا مطلوب ہو جسکی اصلیں کبھی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^3 - ۳\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + ۳\,\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

کی اصلوں (عہ، بہ، جہ) میں سے دو دو کے فرقوں کے مربع ہوں تو ہم اول دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جس سے مساوات حاصل ہو گی

$$\text{ما}^3 + \frac{\text{۳ھ}}{\text{ا}_0^2}\,\text{ما} + \frac{\text{گ}}{\text{ا}_0^3} = ۰$$

اور مطلوبہ مساوات وہی ہوگی جو اس مساوات کی مربع دار فرقوں کی مساوات ہے کیونکہ دوسری رقم کو خارج کرنے سے کسی دو اصلوں کا فرق غیر متبدل رہتا ہے۔ اس لئے موخرالذکر مساوات میں

$$\text{ق} = \frac{3\,\text{ھ}}{\text{ا}^{2}}\,,\quad \text{ر} = \frac{\text{گ}}{\text{ا}^{3}}$$

رکھنے سے ہم مطلوبہ مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ مطلوبہ مساوات ہے (83)

$$\text{لا}^{3} + \frac{18\,\text{ھ}}{\text{ا}^{2}}\,\text{لا}^{2} + \frac{81\,\text{ھ}^{2}}{\text{ا}^{4}}\,\text{لا} + \frac{27}{\text{ا}^{6}}\left(\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

جسکی اصلیں ہیں

$$(\text{ب} - \text{ج})^{2},\quad (\text{ج} - \text{ع})^{2},\quad (\text{ع} - \text{ب})^{2}$$

مساوات (۴) سے کسروں کو دور کرنے کے لئے اس کی اصلوں کو $\text{ا}^{2}$ سے ضرب دینا ہوگا جس سے یہ مساوات ہو جائیگی

$$\text{لا}^{3} + 18\,\text{ھ}\,\text{لا}^{2} + 81\,\text{ھ}^{2}\,\text{لا} + 27\left(\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

جسکی اصلیں ہونگی

$$\text{ا}^{2}(\text{ب} - \text{ج})^{2},\quad \text{ا}^{2}(\text{ج} - \text{ع})^{2},\quad \text{ا}^{2}(\text{ع} - \text{ب})^{2}$$

اسکی مدد سے کعبی (۳) کی اصلوں کا ایک اہم تفاعل یعنی **فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب** سروں کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے:-

$$\text{ا}^{6}(\text{ب} - \text{ج})^{2}(\text{ج} - \text{ع})^{2}(\text{ع} - \text{ب})^{2} = -27\left(\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

دفعہ ۳۷ کی تماثلہ سے یہ ظاہر ہے کہ $\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}$ کا ایک جزو ضربی

$\text{ا}_0^2$ ہے کیونکہ درحقیقت

$$\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3 \equiv \text{ا}_0^2\left\{\text{ا}_0^2\,\text{ا}_3^2 - 6\,\text{ا}_0\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3 + 4\,\text{ا}_0\,\text{ا}_2^3 + 4\,\text{ا}_1^3\,\text{ا}_3 - 3\,\text{ا}_1^2\,\text{ا}_2^2\right\}$$

خطوط واحدانی میں جو جملہ ہے اس کو ہم کعبی کا ممیز کہینگے اور $\Delta$ سے تعبیر کرینگے۔ اس طرح

$$\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3 \equiv \text{ا}_0^2\,\Delta \,،\; \text{ھ}\,\text{ع} - \text{ا}\,\text{ج} \equiv \Delta$$

# مثالیں

۱ — کعبی

$$\text{لا}^3 - 7\,\text{لا} + 6 = 0$$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ۔

**جواب:** — $\text{لا}^3 - 42\,\text{لا}^2 + 441\,\text{لا} - 400 = 0$

۲ — $\text{لا}^3 + 6\,\text{لا}^2 + 7\,\text{لا} + 2 = 0$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ۔

اول دوسری رقم خارج کرو۔

**جواب:** — $\text{لا}^3 - 30\,\text{لا}^2 + 225\,\text{لا} - 68 = 0$

۳ — $\text{لا}^3 + 6\,\text{لا}^2 + 9\,\text{لا} + 4 = 0$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات بناؤ۔

**جواب:** — $\text{لا}^3 - 18\,\text{لا}^2 + 81\,\text{لا} = 0$

۴ — مثال (۳) میں حاصل شدہ مساوات سے دئے ہوئے کعبی کی اصلوں کے متعلق کیا نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔

**۴۳ — کعبی کی اصلونکی نوعیت کی جانچ** — دفعہ ۴۲ میں حاصل شدہ (84)
فرقوں کی مساوات کی شکل سے ہم سروں کی رقوم میں ایک ایسا جملہ معلوم کر سکتے ہیں جسکے ذریعہ جبری کعبی کی اصلوں کی نوعیت معلوم ہوسکیگی۔ کیونکہ جب دفعہ ۴۲ کی

مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہو تو کعبی (۳) کی دو اصلیں خیالی ہونگی تاکہ انکے ذق کا مربع منفی ہو۔ اور جب مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہ ہو تو کعبی (۳) کی سب اصلیں حقیقی ہونگی کیونکہ (۳) کی خیالی اصلوں کے ایک زوج سے (۵) کی ایک منفی اصل کا موجود ہونا لازم آتا ہے۔

حسب ذیل صورتوں میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات کے سر حقیقی مقداریں ہیں۔ تب چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں:۔

(۱) اگر گ$^2$ + ۴ ھ$^3$ منفی ہو تو کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی۔ کیونکہ اسکو منفی بنانے کے لئے ھ کو منفی ہونا چاہئے (اور ۴ ھ$^3$ > گ$^2$) تب مساوات (۵) کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہونگی اور اسلئے (دفعہ ۲۰ سے) مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہیں ہوگی اور اسلئے دئے ہوئے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی۔

(۲) اگر گ$^2$ + ۴ ھ$^3$ مثبت ہو تو کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ اس صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہونی چاہئے۔

(۳) اگر گ$^2$ + ۴ ھ$^3$ = ۰ تو کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل صفر کے مساوی ہوتی ہے اس صورت میں $\Delta$ = ۰۔ اور یہ مان لیا گیا ہے کہ ا۰ معدوم نہیں ہوتا۔ اسلئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ممیز (دفعہ ۴۲) کا صفر ہونا وہ شرط ظاہر کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے۔

(۴) اگر گ = ۰ اور ھ = ۰ تو کعبی کی تینوں اصلیں مساوی ہونگی۔ کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی سب اصلیں

صفر کے مساوی ہوتی ہیں۔ یہ مساواتیں شکل

$$\frac{\text{ر}_0}{\text{ر}_1} = \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} = \frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_3}$$

میں بھی بہ آسانی بیان کیجا سکتی ہیں اور اسلیئے سروں کے درمیان یہ روابط

وہ شرطیں ہیں کہ کعبی ایک کامل مکعب ہو۔

**۴۴ — عام صورت میں فرقوں کی مساوات۔** اب ہم متشاکل تفاعلوں کی مدد سے وہ مساوات بنانیکے عام مسئلہ پر غور کرینگے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرق، یا فرقوں کے مربع ہوں۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{ع}_1)(\text{لا} - \text{ع}_2)\ldots\ldots(\text{لا} - \text{ع}_\text{ن}) = 0$$

ہے۔ اسمیں لا کی بجائے لا + عر درج کرنے اور ر کو یکے بعد دیگرے (85)
۱، ۲، ۳، ....، ن قیمتیں دینے سے ہمیں مساواتیں ملینگی

$$\left.\begin{array}{l}
\text{ف}(\text{لا}+\text{ع}_1) \equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{ع}_1-\text{ع}_2)(\text{لا}+\text{ع}_1-\text{ع}_3)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{ع}_1-\text{ع}_\text{ن}) \\
\text{ف}(\text{لا}+\text{ع}_2) \equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{ع}_2-\text{ع}_1)(\text{لا}+\text{ع}_2-\text{ع}_3)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{ع}_2-\text{ع}_\text{ن}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{ف}(\text{لا}+\text{ع}_\text{ن}) \equiv \text{لا}(\text{لا}+\text{ع}_\text{ن}-\text{ع}_1)(\text{لا}+\text{ع}_\text{ن}-\text{ع}_2)\ldots\ldots(\text{لا}+\text{ع}_\text{ن}-\text{ع}_{\text{ن}-1})
\end{array}\right\}\ldots(1)$$

نیز دفعہ ۶ کا پھیلاؤ استعمال کرنے سے اور ف(عر) = ۰ رکھنے سے ہمیں مساوات ملیگی

$$\frac{1}{\text{لا}}\,\text{ف}(\text{لا}+\text{ع}_\text{ر}) = \text{ف}'(\text{ع}_\text{ر}) + \frac{\text{لا}}{2\times1}\,\text{ف}''(\text{ع}_\text{ر}) + \frac{\text{لا}^2}{3\times2\times1}\,\text{ف}'''(\text{ع}_\text{ر}) + \ldots + \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

اس مساوات کی دوسری جانب کے جملہ کو فہ (لا، عہ$_{ر}$) سے تعبیر کیا جائے اور متماثلات (۱) کو باہم ضرب دیا جائے تو

فہ (لا، عہ$_{۱}$) فہ (لا، عہ$_{۲}$) ....... فہ (لا، عہ$_{ن}$)

≡ {لا$^{۲}$ − (عہ$_{۱}$ − عہ$_{۲}$)$^{۲}$} {لا$^{۲}$ − (عہ$_{۱}$ − عہ$_{۳}$)$^{۲}$} ..... {لا$^{۲}$ − (عہ$_{ن-۱}$ − عہ$_{ن}$)$^{۲}$}

اس لئے فرقوں کی مساوات بنانے کے لئے ہم ن اجزائے ضربی فہ (لا، عہ$_{۱}$)، فہ (لا، عہ$_{۲}$) وغیرہ کو باہم ضرب دیسکتے ہیں اور حاصل ضرب میں اصلوں کے جو متشاکل تفاعل واقع ہوتے ہیں انکی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ یا ہم دفعہ ۴۲ میں بتلائے ہوے طریقہ کی بموجب متماثلہ بالا کی بائیں جانب کے $\frac{۱}{۲}$ ن (ن − ۱) اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بالراست معلوم کر سکتے ہیں اور پھر متشاکل تفاعلوں کی بجائے اِن کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ لا میں ن (ن − ۱) ویں درجہ کی حاصل ہونے والی مساوات کی اصلوں میں سے دو دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہونگی۔ اب چونکہ اس مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوتی ہیں اس لئے لا$^{۲}$ کی بجائے ما درج کیا جا سکتا ہے اور اس طرح $\frac{۱}{۲}$ ن (ن − ۱) ویں درجہ کی وہ مساوات حاصل ہو سکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلونکے فرقوں کے مربع ہوں۔

تیسرے درجہ سے اعلیٰ تر مساواتوں کے لئے فرقوں کی مساوات کا بنانا دشوار ہو جاتا ہے۔ ہم کسی آیندہ باب میں درجہ چہارم کی عام جبری مساوات کی صورت میں فرقوں کی مساوات معلوم کرینگے۔

## مثالیں

(86)

۱۔ مساوات

لا$^{۳}$ − ۶ لا$^{۲}$ + ۱۱ لا − ۶ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ$^{2}$ + جہ$^{2}$ ، جہ$^{2}$ + عہ$^{2}$ ، عہ$^{2}$ + بہ$^{2}$

ہوں۔

**جواب:-** ما$^{3}$ − ۲۸ ما$^{2}$ + ۲۴۵ ما − ۶۵۰ = ۰

۲— کعبی

لا$^{3}$ + ۲ لا$^{2}$ + ۳ لا + ۱ = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$\frac{1}{\text{بہ}^{3}}$ + $\frac{1}{\text{جہ}^{3}}$ − $\frac{1}{\text{عہ}^{3}}$ ، $\frac{1}{\text{جہ}^{3}}$ + $\frac{1}{\text{عہ}^{3}}$ − $\frac{1}{\text{بہ}^{3}}$ ، $\frac{1}{\text{عہ}^{3}}$ + $\frac{1}{\text{بہ}^{3}}$ − $\frac{1}{\text{جہ}^{3}}$

ہوں۔

**جواب:-** ما$^{3}$ + ۱۲ ما$^{2}$ − ۱۷۲ ما − ۲۰۷۲ = ۰

۳— کعبی

لا$^{3}$ + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ$^{2}$ + بہ جہ + جہ$^{2}$ ، جہ$^{2}$ + عہ جہ + عہ$^{2}$ ، عہ$^{2}$ + عہ بہ + بہ$^{2}$

ہوں۔

**جواب:-** (ما + ق)$^{3}$ = ۰

۴— کعبی

لا$^{3}$ + ف لا$^{2}$ + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

بہ$^{2}$ + جہ$^{2}$ − عہ$^{2}$ ، جہ$^{2}$ + عہ$^{2}$ − بہ$^{2}$ ، عہ$^{2}$ + بہ$^{2}$ − جہ$^{2}$

ہوں۔

**جواب:-** ما$^{3}$ − (ف$^{2}$ − ۲ق) ما$^{2}$ − (ف$^{4}$ − ۴ ف$^{2}$ ق + ۸ ف ر) ما
+ ف$^{6}$ − ۶ ف$^{4}$ ق + ۸ ف$^{3}$ ر + ۸ ف$^{2}$ ق$^{2}$ − ۱۶ ف ق ر + ۸ ر$^{2}$ = ۰

۵— اگر کعبی

لا^۳ - ۳ (۱ + ا + ا^۲) لا + ۱ + ۳ ا + ۳ ا^۲ + ۲ ا^۳ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)، ا کا ایک منطق تفاعل ہے۔

**جواب** :- ± ۹ (۱ + ا + ا^۲)

۶ — کعبی

ا. لا^۳ + ۳ ا۱ لا^۲ + ۳ ا۲ لا + ا۳ = ۰

کے گ اور ھ کے درمیان ربط معلوم کرو اگر اس کی اصلیں عہ، بہ، جہ ایسی ہوں کہ (بہ - جہ)^۲، (جہ - عہ)^۲، (عہ - بہ)^۲ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

**جواب** :- گ^۲ + ۲ ھ^۳ = ۰

۷ — اگر

ج^۲ لا^۴ - ۲ ج^۲ لا^۳ + ۲ لا - ۱ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو

(بہ^۲ - جہ^۲)^۲ (عہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (جہ^۲ - عہ^۲)^۲ (بہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (عہ^۲ - بہ^۲)^۲ (جہ^۲ - ضہ^۲)^۲

کی قیمت معلوم کرو۔ **جواب** :- صفر

۸ — اگر (87)

بہ جہ + جہ عہ + عہ بہ + عہ ضہ + بہ ضہ + جہ ضہ = ۰

تو ثابت کرو کہ

{(بہ - جہ)^۲ (عہ - ضہ)^۲ + (جہ - عہ)^۲ (بہ - ضہ)^۲ + (عہ - بہ)^۲ (جہ - ضہ)^۲}^۲

= ۱۸ {(بہ^۲ - جہ^۲)^۲ (عہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (جہ^۲ - عہ^۲)^۲ (بہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (عہ^۲ - بہ^۲)^۲ (جہ^۲ - ضہ^۲)^۲}

۹ — مساوات

لا^۴ - لا^۳ + ۸ لا^۲ - ۹ لا - ۱۵ = ۰

کو حل کرو جس کی ایک اصل شکل ۱ + عہ √-۱ کی ہے۔
اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹاؤ۔ لا کی بجائے عہ √-۱ درج کرو۔ عہ کو

مساواتیں $ع^۴ - ۳ع^۲ - ۴ = ۰$ اور $ع^۴ - ۶ع^۲ + ۸ = ۰$ پوری کرنی چاہئیں۔ پس $ع = \pm ۲$
اس لئے ایک جزو ضربی $لا^۲ - ۲لا + ۵$ ہے اور دوسرے اجزا $(لا + ۱)$ اور $(لا^۲ - ۳)$ ہیں

۱۰ — کعبی

$$ا_۰ لا^۳ + ۳ا_۱ لا^۲ + ۳ا_۲ لا + ا_۳ = ۰$$

کی اصلیں ع، ب، ج ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب + ج ، ج + ع ، ع + ب$$

ہوں۔

اس مساوات کو دفعہ ۱۴ میں حل کر دیا گیا ہے۔ ہم یہاں دوسرا حل درج کرتے ہیں جو اگرچہ کہ اس خاص مثال میں آسان ترین نہیں ہے لیکن بہت سی مثالوں میں کارآمد ثابت ہوگا۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کی اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹایا گیا ہے تو استحالہ شدہ مساوات ہوگی (دفعہ ۳۵)

$$ا_۰ م^۳ + ۳ا_۱ م^۲ + ۳ا_۲ م + ا_۳ = ۰$$

جس کی اصلیں ع - ھ، ب - ھ، ج - ھ ہیں۔ اب ہم وہ شرط معلوم کرینگے کہ اس مساوات کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف العلامت ہوں۔ یہ شرط ہے (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۷)

$$۹ ا_۱ ا_۲ - ا_۰ ا_۳ = ۰$$

یہ مساوات ھ میں ایک کعبی ہے جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{۲}(ب + ج) ، \frac{۱}{۲}(ج + ع) ، \frac{۱}{۲}(ع + ب)$$

ہیں کیونکہ شرط بالا ہے

$$(ب - ھ) + (ج - ھ) = ۰$$

یعنی

$$۲ھ = ب + ج$$

جہاں ب اور ج سے دی ہوئی مساوات کی کوئی دو اصلیں تعبیر ہوتی ہیں۔ ھ کے لئے جو مساوات حاصل ہوئی ہے اس کی اصلوں کو ۲ سے ضرب دیکر مطلوبہ

کعبی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۱ — چار درجی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ چھ درجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\text{به} + \text{جه}،\ \text{جه} + \text{عه}،\ \text{عه} + \text{به}،\ \text{عه} + \text{ضه}،\ \text{به} + \text{ضه}،\ \text{جه} + \text{ضه}$$

ہوں۔

مثال ۱۰ کا طریقہ استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات دفعہ ۲۴ مثال ۲۰ کی شرط سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں شرط ہوگی

$$6\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3 - \text{ا}_1^2\,\text{ا}_4 - \text{ا}_0\,\text{ا}_3^2 = 0$$

یہ مساوات هہ میں چھ درجی ہے جس کی اصلیں $\frac{1}{2}(\text{به} + \text{جه})$ وغیرہ ہیں جس سے مطلوبہ مساوات گزشتہ مثال کی طرح حاصل کی جا سکتی ہے۔

۱۲ — مثال ۱۰ کے کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں (88)

$$\frac{\text{به}\,\text{جه} - \text{عه}^2}{\text{به} + \text{جه} - 2\,\text{عه}}،\quad \frac{\text{جه}\,\text{عه} - \text{به}^2}{\text{جه} + \text{عه} - 2\,\text{به}}،\quad \frac{\text{عه}\,\text{به} - \text{جه}^2}{\text{عه} + \text{به} - 2\,\text{جه}}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر هہ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ حاصل ہونے والے کعبی کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں (دفعہ ۲۴ مثال ۱۸)۔ یہ شرط ہوگی

$$\text{ا}_1^3\,\text{ا}_3 - \text{ا}_0\,\text{ا}_2^3 = 0$$

یہ مساوات هہ میں تیسرے درجہ کی مساوات میں تحویل ہوگی جس کی اصلیں مندرجہ بالا قیمتیں ہونگی کیونکہ

$$(\text{عه} - \text{هه})^2 = (\text{به} - \text{هه})(\text{جه} - \text{هه})\ \text{یعنی}\ \text{هه} = \frac{\text{به}\,\text{جه} - \text{عه}^2}{\text{به} + \text{جه} - 2\,\text{عه}}$$

۱۳ — اسی کعبی کی صورت میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{\text{۲ بہ جہ − عہ بہ − عہ جہ}}{\text{بہ + جہ − ۲ عہ}}\ ،\ \frac{\text{۲ جہ عہ − بہ جہ − بہ عہ}}{\text{جہ + عہ − ۲ بہ}}\ ،\ \frac{\text{۲ عہ بہ − جہ عہ − جہ بہ}}{\text{عہ + بہ − ۲ جہ}}$$

ہوں ۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ استحالہ شدہ کعبی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۹) ۔

$$\frac{2}{\text{عہ} - \text{ھ}} = \frac{1}{\text{بہ} - \text{ھ}} + \frac{1}{\text{جہ} - \text{ھ}}$$

یعنی

$$\text{ھ} = \frac{\text{۲ بہ جہ − عہ بہ − عہ جہ}}{\text{بہ + جہ − ۲ عہ}}$$

ھ میں مساوات ہے

$$\text{ا}_0\,\text{ا}_3^2 - 3\,\text{ا}_1\,\text{ا}_2\,\text{ا}_3 + 2\,\text{ا}_2^3 = 0$$

جو ایک کعبی میں تحویل ہو جائیگی ۔

۱۴ — چار درجی

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^4 + 4\,\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 6\,\text{ا}_2\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ا}_4 = 0$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہیں ۔ وہ کعبی معلوم کرو جس کی اصلیں

$$\frac{\text{بہ جہ − عہ ضہ}}{\text{بہ + جہ − عہ − ضہ}}\ ،\ \frac{\text{جہ عہ − بہ ضہ}}{\text{جہ + عہ − بہ − ضہ}}\ ،\ \frac{\text{عہ بہ − جہ ضہ}}{\text{عہ + بہ − جہ − ضہ}}$$

ہوں ۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کی شرط استعمال کرو ۔ اس صورت میں یہ شرط ہے

$$\text{ا}_1^2\,\text{ا}_4 - \text{ا}_0\,\text{ا}_3^2 = 0$$

جس کو ایک کعبی میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کی اصلیں مندرجہ بالا قیمتیں ہوں۔

**۱۵**۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں کعبی

لا$^{3}$ + ق لا + ر = ۰

کی اصلوں کی نسبتیں ہوں۔

عام مسئلہ کو عمل اسقاط کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ف(لا) = ۰ دی ہوئی مساوات ہے اور ی = به/عه = دو اصلوں کی نسبت۔ اب چونکہ ف(به) = ۰ اسلئے ف(ی عه) = ۰ اور نیز ف(عه) = ۰۔ اسلئے ی میں مطلوبہ مساوات ان دو موخرالذکر مساواتوں سے عه کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔ موجودہ (89)
مثال کے کعبی کی صورت میں

ر$^{2}$ (ی$^{2}$ + ی + ۱)$^{3}$ + ق$^{3}$ ی$^{2}$ (ی + ۱)$^{2}$ = ۰

**۱۶**۔ اگر

لا$^{3}$ + ف لا$^{2}$ + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عه، به، جه ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

به$^{2}$ + جه$^{2}$، جه$^{2}$ + عه$^{2}$، عه$^{2}$ + به$^{2}$

ہوں۔

**جواب**:۔ لا$^{3}$ − ۲(ف$^{2}$ − ۲ق) لا$^{2}$ + (ف$^{4}$ − ۴ف$^{2}$ق + ۵ق$^{2}$ − ۲ف ر) لا − (ف$^{2}$ق$^{2}$ − ۲ف$^{3}$ر + ۴ف ق ر − ۲ق$^{3}$ − ر$^{2}$) = ۰

**۱۷**۔ اسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

به/جه + جه/به، جه/عه + عه/جه، عه/به + به/عه

**جواب**:۔ ر$^{2}$ لا$^{3}$ − (ف ق ر − ۳ر$^{2}$) لا$^{2}$ + (ف$^{3}$ر − ۵ف ق ر + ۳ر$^{2}$ + ق$^{3}$) لا − (ف$^{2}$ق$^{2}$ − ۲ف$^{3}$ر + ۴ف ق ر − ۲ق$^{3}$ − ر$^{2}$) = ۰

**۱۸**۔ اگر کعبی

لا$^{3}$ + ق لا + ر = ۰

کی اصلیں عه، به، جه ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

ل عہ + م بہ جہ ، ل بہ + م جہ عہ ، ل جہ + م عہ بہ

ہوں ۔

**جواب** :- ما$^3$ - م ق ما$^2$ + (ل$^2$ق + ۳ ل م ر) ما
+ ل$^3$ر - ل$^2$م ق$^2$ - ۲ ل م$^2$ق ر - م$^3$ر$^2$ = ۰

**۱۹** — اگر کعبی

ا. لا$^3$ + ۳ ا$_1$ لا$^2$ + ۳ ا$_2$ لا + ا$_3$ = ۰

کی اصلیں عہ ، بہ ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں
(عہ - بہ)(عہ - جہ) ، (بہ - جہ)(بہ - عہ) ، (جہ - عہ)(جہ - بہ)
ہوں ۔

**جواب** :- ما$^3$ + (۹ ھ / ا.$^2$) ما - ۲۷ (گ$^2$ + ۴ ھ$^3$) / ا.$^4$ = ۰

**۲۰** — مثال ۱۹ کے کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں
(بہ - جہ)$^2$ (۲ عہ - بہ - جہ)$^2$ ، (جہ - عہ)$^2$ (۲ بہ - جہ - عہ)$^2$ ، (عہ - بہ)$^2$ (۲ جہ - عہ - بہ)$^2$
ہوں ۔

دفعہ ۴۲ کے کعبی (۴) کی مربع دار فرقوں کی مساوات بنانے سے مطلوبہ مساوات حاصل کیجا سکتی ہے کیونکہ
(جہ - عہ)$^2$ - (عہ - بہ)$^2$ = (بہ - جہ) (۲ عہ - بہ - جہ)

**۲۱** — مثال ۱۶ کے کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں
عہ (بہ - جہ)$^2$ ، بہ (جہ - عہ)$^2$ ، جہ (عہ - بہ)$^2$
ہوں ۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات لا$^3$ + ف لا$^2$ + ق لا + ر = ۰ ہے ۔

**جواب** :- ف = ف ق - ۹ ر ، ق = ق$^3$ - ۹ ف ق ر + ۲۷ ر$^2$
+ ف$^3$ر ، ر = - ر (۴ ق$^3$ + ۲۷ ر$^2$ + ۴ ف$^3$ر - ف$^2$ق$^2$ - ۱۸ ف ق ر)

**۲۲** — اُسی کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں
عہ$^2$ + ۲ بہ جہ ، بہ$^2$ + ۲ جہ عہ ، جہ$^2$ + ۲ عہ بہ
ہوں ۔

**جواب** :- ف = - ف$^3$ ، ق = ق (۲ ف$^2$ - ۳ ق) ،
- ر = ۴ ف$^3$ر - ۱۸ ف ق ر + ۲ ق$^3$ + ۲۷ ر$^2$

(۹۰)

# پانچواں باب

## تکافی اور ثنائی مساواتوں کا حل

**۴۵ - تکافی مساواتیں** - دفعہ ۳۲ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ تمام تکافی مساواتوں کو ایک معیاری شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے جسکا درجہ جفت ہو اور ابتدا اور آخر سے شمار کی ہوئی رقمیں مساوی اور ہم علامت ہوں - اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ معیاری شکل کی تکافی مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں بدلا جا سکتا ہے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ کا نصف ہو - مساوات

$$\text{ا}_{٠}\,\text{لا}^{٢م} + \text{ا}_{١}\,\text{لا}^{٢م-١} + \dots\dots + \text{ا}_{م}\,\text{لا}^{م} + \dots\dots + \text{ا}_{١}\,\text{لا} + \text{ا}_{٠} = ٠$$

پر غور کرو - اس کو $\text{لا}^{م}$ سے تقسیم کرکے ابتدا اور آخر سے متساوی الفصل رقموں کو ملانے سے

$$\text{ا}_{٠}\left(\text{لا}^{م} + \frac{١}{\text{لا}^{م}}\right) + \text{ا}_{١}\left(\text{لا}^{م-١} + \frac{١}{\text{لا}^{م-١}}\right) + \dots + \text{ا}_{م-١}\left(\text{لا} + \frac{١}{\text{لا}}\right) + \text{ا}_{م} = ٠$$

فرض کرو کہ $\text{لا} + \frac{١}{\text{لا}} = \text{ی}$ اور یہ کہ $\text{لا}^{پ} + \frac{١}{\text{لا}^{پ}}$ اختصاراً $\text{و}_{پ}$ سے تعبیر ہوتا ہے تو حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

$$و_{پ+۱} = و_{پ}\, ی - و_{پ-۱}$$

پ کو متواتر ۱، ۲، ۳، وغیرہ قیمتیں دینے سے

$$و_{۲} = و_{۱}\, ی - و_{۰} = ی^{۲} - ۲$$

$$و_{۳} = و_{۲}\, ی - و_{۱} = ی^{۳} - ۳\, ی$$

$$و_{۴} = و_{۳}\, ی - و_{۲} = ی^{۴} - ۴\, ی^{۲} + ۲$$

$$و_{۵} = و_{۴}\, ی - و_{۳} = ی^{۵} - ۵\, ی^{۳} + ۵\, ی$$

وغیرہ۔ اِن قیمتوں کو مساوات بالا میں درج کرنے سے ی میں م ویں درجہ کی مساوات ملتی ہے اور ی کی قیمتوں سے لا کی قیمتیں درجہ دوم کی ایک مساوات حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(91) 

# مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$$

کی اصلیں معلوم کرو۔

لا + ۱ سے تقسیم کرو (دیکھو دفعہ ۳۲) تو

$$لا^{۴} + لا^{۲} + ۱ = ۰$$

اس مساوات کو شکل

$$ی^{۲} - ۱ = ۰$$

میں گھٹایا جا سکتا ہے جس سے ی = ± ۱ یعنی

$$لا + \frac{۱}{لا} = ۱ ، \quad لا + \frac{۱}{لا} = -۱$$

اور اِن مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲} ، \quad \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$$

۲ — مساوات

$$لا^{۵} - ۳لا^{۴} + ۵لا^{۳} - ۵لا^{۲} + ۳لا - ۱ = ۰$$

کی اصلیں معلوم کرو۔

لا − ۱ سے تقسیم کرو جسکو اختصاراً یوں کیا جاسکتا ہے :-

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۳− | ۵ | ۵− | ۳ | ۱− |
| | ۱ | ۲− | ۳ | ۲− | ۱ |
| ۱ | ۲− | ۳ | ۲− | ۱ | ۰ |

توہمیں تنکافی مساوات ملتی ہے

$$لا^{۴} - ۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} - ۲لا + ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

یا

$$\left(لا^{۲} + \frac{۱}{لا^{۲}}\right) - ۲\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) + ۳ = ۰$$

و۴ کی بجائے ی^۴ − ۴ی^۲ + ۲ اور و۲ کی بجائے ی^۲ − ۲ درج کرنے سے

$$ی^{۴} - ۶ی^{۲} + ۹ = ۰ \quad یعنی \quad (ی^{۲} - ۳)^{۲} = ۰$$

جس سے

$$ی^{۲} = ۳ \quad اور \quad ی = \pm\sqrt{۳}$$

یعنی

$$لا + \frac{۱}{لا} = +\sqrt{۳} \ ، \ لا + \frac{۱}{لا} = -\sqrt{۳}$$

اور اِن مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{\sqrt{۳} \pm \sqrt{۱-}}{۲} \ ، \ \frac{-\sqrt{۳} \pm \sqrt{۱-}}{۲}$$

یہ اصلیں مساوات (۱) کی دوہری اصلیں ہیں —

۳ — مساوات

$$لا^{۵} - ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

اسکو لا − ۱ سے تقسیم کیا جائے تو

$$لا^{۴} + لا^{۳} + لا^{۲} + لا + ۱ = ۰$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ی}^{۲} + \text{ی} - ۱ = ۰$$

(92) اس مساوات کو حل کرنے سے

$$\text{لا}^{۲} + \tfrac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵})\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

$$\text{لا}^{۲} + \tfrac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵})\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

اور پھر اِن مساواتوں سے

$$\text{لا} = \tfrac{۱}{۴}\left\{ -۱ + \text{ط}\sqrt{۵} \pm (۱۰ + ۲\,\text{ط}\sqrt{۵})^{\frac{۱}{۲}} \sqrt{-۱} \right\}$$

جہاں $\text{ط}^{۲} = ۱$

اس جملہ سے لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔

۴ — $\text{لا}^{۶} + ۱ = ۰$

کے دو درجی اجزائے ضربی معلوم کرو۔

اس کو مستحیل کرنے سے

$$\text{ی}^{۳} - ۳\,\text{ی} = ۰$$

اس لئے　　$\text{ی} = ۰$ اور $\text{ی} = \pm\sqrt{۳}$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے دو درجی اجزائے ضربی ہیں

$$\text{لا}^{۲} + ۱ = ۰،\quad \text{لا}^{۲} \pm \sqrt{۳}\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

۵ — مساواتوں

$$(۱)\ (۱ + \text{لا})^{۴} = \text{ا}(۱ + \text{لا}^{۴})،\quad (۲)\ (۱ + \text{لا})^{۵} = \text{ا}(۱ + \text{لا}^{۵})$$

کو حل کرو۔

۶ — $$\frac{(۱ + \text{لا})^{۵}}{۱ + \text{لا}^{۵}} + \frac{(۱ - \text{لا})^{۵}}{۱ - \text{لا}^{۵}} = ۲\,\text{ا}$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جو ی میں چوتھے درجہ کی ہو۔

**جواب**:— $(۱ - \text{ا})\,\text{ی}^{۴} + (۷ + ۱۳\,\text{ا})\,\text{ی}^{۲} - (۴ + \text{ا}) = ۰$

## ۴۶ ـ ثنائی مساواتیں ـ عام خواص ـ

ثنائی مساواتوں کے اہم خواص اِس دفعہ اور دفعات آیندہ میں ثابت کئے جائینگے ـ

مسئلہ ۱:ـ اگر لا$^{ن}$ ـ ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل عہ ہو تو عہ$^{م}$ بھی ایک اصل ہوگی جہاں م کوئی صحیح عدد ہے ـ

چونکہ عہ ایک اصل ہے اسلئے

عہ$^{ن}$ = ۱ اور اسلئے (عہ$^{ن}$)$^{م}$ = ۱ یعنی (عہ$^{م}$)$^{ن}$ = ۱

یعنی لا$^{ن}$ ـ ۱ = ۰ کی ایک اصل عہ$^{م}$ ہے ـ

یہ بات مساوات لا$^{ن}$ + ۱ = ۰ کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ م طاق عدد ہو ـ

**۴۷ ـــ اگر صحیح عدد م اور ن ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو مساواتوں لا$^{م}$ ـ ۱ = ۰، لا$^{ن}$ ـ ۱ = ۰ میں کوئی اصل سوائے اکائی کے مشترک نہیں ہو سکتی ـ**

اس کو ثابت کرنیکے لئے ہم صحیح عددوں کی حسب ذیل خاصیت استعمال (98)
کرتے ہیں :ـ

اگر صحیح عدد م اور ن ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو صحیح عدد ا اور ب معلوم کئے جا سکتے ہیں ایسے کہ م ب ـ ن ا = ± ۱ ـ

کیونکہ فی الحقیقت جب $\frac{م}{ن}$ کو ایک کسر مسلسل کی شکل میں لکھا جاتا ہے تو $\frac{ا}{ب}$ وہ

تقریب ہے جو کسر $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ کے تقریبوں میں ماقبل آخر واقع ہوتا ہے۔

اب اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دی ہوئی مساواتوں کی کوئی مشترک اصل عہ ہے۔ تب

$$\text{عہ}^{\text{م}} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{عہ}^{\text{ن}} = ۱$$

اسلئے

$$\text{عہ}^{\text{م ب}} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{عہ}^{\text{ن ا}} = ۱$$

جس سے

$$\text{عہ}^{(\text{م ب} - \text{ن ا})} = ۱ \quad \text{یعنے} \quad \text{عہ}^{\pm ۱} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{عہ} = ۱$$

یعنے دی ہوئی مساواتوں کی مشترک اصل صرف ۱ ہے۔

۴۸ ـ مسئلہ ۳ ـ اگر دو صحیح عددوں م اور ن کا مقسوم علیہ اعظم ک ہو تو مساواتوں $\text{لا}^{\text{م}} - ۱ = ۰$ اور $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کے درمیان مشترک اصلیں مساوات $\text{لا}^{\text{ک}} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہونگی۔

اس کو ثابت کرنیکے لئے فرض کرو کہ

$$\text{م} = \text{ک م}' \text{،} \quad \text{ن} = \text{ک ن}'$$

اب چونکہ مَ اور نَ ایسے عدد ہیں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں اسلئے ایسے صحیح عدد ب اور ا معلوم کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\text{م}'\text{ب} - \text{ن}'\text{ا} = \pm ۱$$

پس

$$\text{م ب} - \text{ن ا} = \pm \text{ک}$$

اسلئے اگر $\text{لا}^{\text{م}} - ۱ = ۰$ اور $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی ایک مشترک اصل عہ ہو تو

$$\text{عہ}^{(\text{م ب} - \text{ن ا})} = ۱ \quad \text{یعنے} \quad \text{عہ}^{\text{ک}} = ۱$$

جس کے یہ معنی ہیں کہ مساوات $\text{لا}^{\text{ک}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل عہ ہے۔

**۴۹ ـ مسئلہ ۴ ـ اگر ن ایک مفرد عدد ہو اور $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی کوئی خیالی اصل عہ ہو تو تمام اصلیں سلسلہ**

$$۱،\ \text{عہ}،\ \text{عہ}^{۲}،\ \ldots\ldots\ \text{عہ}^{\text{ن}-۱}$$

**میں شامل ہیں۔**

کیونکہ مسئلہ (۱) سے یہ تمام مقداریں دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں اور یہ سب مختلف بھی ہیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی ہیں یعنی $\text{عہ}^{\text{ف}} = \text{عہ}^{\text{ق}}$ تو

$$\text{عہ}^{\text{ف} - \text{ق}} = ۱$$

لیکن مسئلہ ۲ سے یہ ناممکن ہے کیونکہ ن بالضرور (ف - ق) کے لحاظ سے جو ن سے کم ہے مفرد ہے۔

**۵۰ ـ مسئلہ ۵ ـ اگر صحیح عدد ن کے اجزائے ضربی ف، ق، ر** (94)
**وغیرہ صحیح عدد ہوں تو مساواتوں $\text{لا}^{\text{ف}} - ۱ = ۰$، $\text{لا}^{\text{ق}} - ۱ = ۰$، $\text{لا}^{\text{ر}} - ۱ = ۰$ وغیرہ کی اصلیں مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کو پورا کرینگی۔**

مساوات $\text{لا}^{\text{ف}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل عہ پر غور کرو تو $\text{عہ}^{\text{ف}} = ۱$ جس سے

$$\left(\text{عہ}^{\text{ف}}\right)^{\text{ق ر}\ldots} = ۱ \quad \text{یعنی} \quad \text{عہ}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$$

اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔

**۵۱ ـ مسئلہ ۶ ـ اگر عدد مرکب ن کے اجزائے ضربی ف، ق، ر وغیرہ مفرد عدد ہوں تو مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی اصلیں حاصل ضرب**

$$(۱ + \text{عہ} + \text{عہ}^{۲} + \ldots + \text{عہ}^{\text{ف}-۱})(۱ + \text{بہ} + \text{بہ}^{۲} + \ldots + \text{بہ}^{\text{ق}-۱})(۱ + \text{جہ} + \text{جہ}^{۲} + \ldots + \text{جہ}^{\text{ر}-۱})\ldots$$

کی ن رقمیں ہونگی جہاں $لا^{ف} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل عہ ہے، $لا^{ق} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل بہ، وغیرہ۔

ہم اسکو تین اجزائے ضربی ف، ق، ر کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ عام صورت میں اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی کوئی رقم مثلاً $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$ مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے کیونکہ $عہ^{ان} = ۱$، $بہ^{بن} = ۱$، $جہ^{جن} = ۱$ اور اسلئے $(عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج})^{ن} = ۱$۔ اسکے علاوہ حاصل ضرب کی کوئی دو رقمیں مساوی نہیں ہوسکتیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$ دوسری رقم $عہ^{اَ} بہ^{بَ} جہ^{جَ}$ کے مساوی ہے تو $عہ^{اَ-ا} = بہ^{ب-بَ} جہ^{ج-جَ}$۔

اس مساوات کا پہلا رکن مساوات $لا^{ف} - ۱ = ۰$ کی اصل ہے اور دوسرا رکن مساوات $لا^{ق ر} - ۱ = ۰$ کی اصل ہے۔ اب ان دو مساواتوں میں کوئی اصل مشترک نہیں ہوسکتی کیونکہ ف اور ق ر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں (مسئلہ ۲)۔ پس $عہ^{ا} بہ^{ب} جہ^{ج}$، $عہ^{اَ} بہ^{بَ} جہ^{جَ}$ کے مساوی نہیں ہوسکتا۔

**۵۲ ۔ مسئلہ ۷۔** اگر $ن = ف^{ا} ق^{ب} ر^{ج}$ اور ن کے مفرد اجزائے ضربی ف، ق، ر ہوں تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی اصلیں شکل عہ بہ جہ کے مشابہ ن حاصل ضربوں کے مساوی ہونگی جہاں $لا^{ف^{ا}} = ۱$ کی ایک اصل عہ ہے، $لا^{ق^{ب}} = ۱$ کی ایک اصل بہ، $لا^{ر^{ج}} = ۱$ کی ایک اصل جہ۔

یہ مسئلہ مسئلہ ۶ کی توسیع ہے جسمیں ن کے مفرد اجزا ایک سے زیادہ مرتبہ ن میں واقع ہوتے ہیں۔ اس کا ثبوت بالا کے بالکل مشابہ

ہے ۔ چنانچہ عہ بہ جہ جیسا کوئی حاصل ضرب ایک اصل کے مساوی ہوگا کیونکہ عہ$^{ن}$ = ۱ ، بہ$^{ن}$ = ۱ ، جہ$^{ن}$ = ۱ اور ف ، ق ، ر کا ایک ضعف ن ہے دفعہ ۵۱ کے مماثل ثبوت سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اس قسم کے کوئی دو حاصلضرب مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ ف$^{د}$ ، ق$^{ب}$ ، ر$^{ج}$ ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں ۔ سہولت کی خاطر ہم نے اس مسئلہ کو ن کے صرف تین اجزائے ضربی کے لئے بیان کیا ہے ۔ عام صورت میں بالکل اسی قسم کا ثبوت دیا جا سکتا ہے

اس مسئلہ اور گزشتہ مسئلوں کی مدد سے اب ہم حسب ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں :-

اکائی کے ن ویں جذروں کو متعین کرنیکا سوال اُس صورت میں تحویل ہوتا ہے جسمیں ن مفرد عدد ہو یا مفرد عدد کسی قوت پر (95)
اٹھایا ہوا ۔

**۵۳ ۔ لا$^{ن}$ - ۱ = ۰ کی خاص اصلیں ۔** شکل لا$^{ن}$ - ۱ = ۰ کی ہر مساوات کی چند ایسی اصلیں ہوتی ہیں جو اسی شکل کی مگر کمتر درجہ کی مساوات کی اصلیں نہیں ہوتیں ۔ اِس قسم کی اصلوں کو ہم اُس مساوات کی خاص اصلیں یا اکائی کے خاص ن ویں جذر کہیں گے ۔ اگر ن مفرد عدد ہو تو تمام خیالی اصلیں اس قسم کی اصلیں ہونگی ۔ اگر ن = ف$^{د}$ جہاں ف مفرد عدد ہے تو ن سے کمتر درجہ کی کوئی ن ویں اصل مساوات لا$^{ف^{د-۱}}$ - ۱ = ۰ کی اصل ہونی چاہیے ۔ کیونکہ ف$^{د}$ کا کوئی مقسوم علیہ ف$^{د-۱}$ کا بھی مقسوم علیہ ہے (سوائے خود ن کے) ۔ پس ف$^{د}$ (۱ - $\frac{۱}{ف}$) اصلیں ایسی ہونگی جو ن سے کمتر درجہ کی کسی مساوات کی اصلیں نہیں ہونگی یعنے خاص اصلوں کی تعداد

$ف^{ا}(۱ - \frac{۱}{ف})$ ہے۔ پھر اگر $ن = ف^{ا} ق^{ب}$ جہاں ف اور ق ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں تو $ف^{ا}(۱ - \frac{۱}{ف})$ اور $ق^{ب}(۱ - \frac{۱}{ق})$ اصلیں علی الترتیب مساواتوں $لا^{ف^{ا}} - ۱ = ۰$ اور $لا^{ق^{ب}} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں ہونگی۔ اب اگر اِن مساواتوں کی کوئی دو خاص اصلیں عہ اور بہ ہوں تو مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی ایک خاص اصل عہ بہ ہوگی کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو فرض کرو کہ $(عہ\ بہ)^{م} = ۱$ جہاں $م < ن$۔ پس $عہ^{م} = بہ^{-م}$ لیکن $عہ^{م}$ مساوات $لا^{ف^{ا}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے اور $بہ^{-م}$ مساوات $لا^{ق^{ب}} - ۱ = ۰$ کی ایک اصل ہے۔ مگر اِن مساواتوں میں سوائے اکائی کے کوئی اصل مشترک نہیں ہوسکتی کیونکہ اِن کے درجے ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلا کہ م، ن سے چھوٹا نہیں ہوسکتا اور عہ بہ، مساوات $لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی خاص اصل ہے۔ نیز چونکہ ایسے حاصل ضربوں کی تعداد

$$ف^{ا}(۱ - \frac{۱}{ف})\, ق^{ب}(۱ - \frac{۱}{ق}) \quad \text{یعنی} \quad ن(۱ - \frac{۱}{ف})(۱ - \frac{۱}{ق})$$

ہے اسلئے اِتنی ہی تعداد خاص ن ویں اصلوں کی ہوگی۔ اس ثبوت کو بغیر مشکل کے ن کی کسی شکل پر منطبق کیا جاسکتا ہے۔

$لا^{ن} - ۱ = ۰$ کی سب اصلیں سلسلہ $۱، عہ، عہ^{۲}، عہ^{۳}، \ldots\ldots عہ^{ن-۱}$ میں شامل ہیں جہاں عہ کوئی خاص ن ویں اصل ہے۔ کیونکہ یہ بات ظاہر ہے کہ عہ، $عہ^{۲}$ وغیرہ اصلیں ہیں۔ نیز ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی نہیں کیونکہ اگر $عہ^{ف} = عہ^{ق}$ تو $عہ^{ف-ق} = ۱$ اور اسلئے عہ خاص اصل نہیں ہے اس وجہ سے کہ ف - ق، ن سے چھوٹا ہے۔

**اگر ایک خاص ن واں جذر عہ دیا جائے تو ہم اکائی کے باقی تمام خاص ن ویں جذر معلوم کر سکتے ہیں۔** (96)

چونکہ عہ خاص جذر ہے اسلئے ۱، عہ، عہ$^{۲}$، ..... عہ$^{ن-۱}$ مختلف ن ویں جذر ہیں جیسا کہ ہم نے ابھی ثابت کیا۔ اب اگر اسی سلسلہ کا ایک جذر عہ$^{ف}$ لیا جائے جہاں ف، ن کے لحاظ سے مفرد ہے تو جذر

عہ$^{ف}$، عہ$^{۲ف}$، ..... ، عہ$^{(ن-۱)ف}$، عہ$^{ن ف}$ (=۱)

سب مختلف ہیں کیونکہ عہ کی قوتوں کو جب ن سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہر صورت میں باقی مختلف ہوتے ہیں یعنی عددوں کا سلسلہ ۰، ۱، ۲، ۳ .... ، ن-۱ کسی ترتیب میں۔ پس جذروں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو قبل ازیں لکھا جا چکا ہے سوائے اسکے کہ یہاں رقمیں دوسری ترتیب میں واقع ہوئی ہیں۔ ہر عدد ف کے جواب میں جو ن کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹا ہو اکائی کا ایک خاص ن واں جذر ہے کیونکہ عہ$^{م ف}$، ایک کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م، ن سے چھوٹا ہو اگر ایسا ہو سکتا تو سلسلہ میں دو اصلیں ایک کے مساوی ہوتیں اور ایسی صورت میں سلسلہ سے تمام اصلیں حاصل نہ ہو سکتیں۔ اسلئے کسی ثنائی مساوات کی جس کا درجہ ن سے کم ہو عہ$^{ف}$ اصل نہیں ہو سکتی یعنی عہ$^{ف}$ اکائی کا خاص ن واں جذر ہے۔ یہ بات متذکرہ بالا ثابت شدہ نتیجہ کے مطابق ہے کیونکہ ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد صحیح عددوں کی تعداد، عددوں کی ایک معلومہ خاصیت سے، ن$(۱ - \frac{۱}{پ})(۱ - \frac{۱}{ق})$ ہے جبکہ ن = ف$^{ا}$ ق$^{ب}$ اور اتنی ہی تعداد مساوات لا$^{ن}$ - ۱ = ۰ کی خاص اصلوں کی ہے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا۔

# مثالیں

۱— $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں متعین کرو۔

یہاں $۶ = ۲ \times ۳$ ، اسلئے مساواتوں $لا^{۲} - ۱ = ۰$ ، $لا^{۳} - ۱ = ۰$ کی اصلیں مساوات $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔ اب $لا^{۶} - ۱$ کو $لا^{۲} - ۱$ سے تقسیم کرنے سے $لا^{۴} + ۱$ حاصل ہوتا ہے اور $لا^{۳} + ۱$ کو $\frac{لا^{۲} - ۱}{لا - ۱}$ یعنی $لا + ۱$ سے تقسیم کرنے سے $لا^{۲} - لا + ۱$ حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے $لا^{۲} - لا + ۱ = ۰$ سے $لا^{۶} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلیں متعین ہونگی۔

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$عہ = \frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲} \text{ ، } عہ_{۱} = \frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$$

نیز چونکہ $عہ\, عہ_{۱} = ۱ = عہ^{۶}$

اس لئے $عہ_{۱} = عہ^{۵}$

جسکی تصدیق بہ آسانی ہوسکتی ہے۔

اس لئے خاص اصلیں ہیں

$عہ$ ، $عہ^{۵}$ یا $عہ_{۱}$ ، $عہ_{۱}$ یا $\frac{۱}{عہ}$

97) ۲— $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی خاص اصلوں پر بحث کرو۔

چونکہ ۱۲ کے مفرد اجزائے ضربی ۲ اور ۳ ہیں اور $\frac{۱۲}{۲} = ۶$ ، $\frac{۱۲}{۳} = ۴$ اسلئے $لا^{۶} - ۱ = ۰$ ، اور $لا^{۴} - ۱ = ۰$ کی اصلیں $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔ اب $لا^{۱۲} - ۱$ کو $لا^{۴} - ۱$ اور $لا^{۶} - ۱$ سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسمتوں کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں دو مساواتیں $لا^{۸} + لا^{۴} + ۱ = ۰$ اور $لا^{۶} + ۱ = ۰$ حاصل ہونگی اور یہ دونوں مساواتیں $لا^{۱۲} - ۱ = ۰$ کی اصلوں سے پوری ہونی چاہئیں۔ اس لئے $لا^{۸} + لا^{۴} + ۱$ اور $لا^{۶} + ۱$ کا مقسوم علیہ اعظم لیکر اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساوات $لا^{۴} - لا^{۲} + ۱ = ۰$ کی اصلیں خاص اصلیں ہونگی۔

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم $لا^{۴} - ۱$ اور $لا^{۶} - ۱$ کے ذو اضعاف اقل سے $لا^{۱۲} - ۱$ کو

تقسیم کرتے ۔ اب منکافی مساوات $\text{لا}^{4} - \text{لا}^{2} + 1 = 0$ کو حل کرنے سے $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \pm \sqrt{3}$ ′ پس

$$\left(\text{عہ}، \frac{1}{\text{عہ}}\right) = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} ، \quad \left(\text{عہ}_1، \frac{1}{\text{عہ}_1}\right) = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}$$

مساوات $\text{لا}^{12} - 1 = 0$ کی چار خاص اصلیں ہیں جہاں عہ اور $\text{عہ}_1$ دو خاص اصلیں ہیں ۔

اب ہم ان چار خاص اصلوں کو ان میں سے کسی ایک اصل عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ۔

چونکہ $\text{عہ} + \frac{1}{\text{عہ}} + \text{عہ}_1 + \frac{1}{\text{عہ}_1} = 0$ یعنی $(\text{عہ} + \text{عہ}_1)\left(1 + \frac{1}{\text{عہ}\,\text{عہ}_1}\right) = 0$

اس لئے ہم $\text{عہ}\,\text{عہ}_1 = -1$ لیتے ہیں (جو عہ اور $\text{عہ}_1$ کی قیمتوں کے مطابق ہے)
اور چونکہ $\text{لا}^{6} + 1 = 0$ کی اصلیں عہ اور $\text{عہ}_1$ ہیں اسلئے $\text{عہ}^{6} = -1$ اور $\text{عہ}^{5} = -\frac{1}{\text{عہ}} = \text{عہ}_1$ ۔

یعنے اصلیں عہ، $\text{عہ}_1$، $\frac{1}{\text{عہ}}$، $\frac{1}{\text{عہ}_1}$ سلسلہ عہ، $\text{عہ}^{5}$، $\text{عہ}^{7}$، $\text{عہ}^{11}$ سے بیان ہو سکتی ہیں کیونکہ $\text{عہ}^{12} = 1$ ۔

نیز عہ کی بجائے $\text{عہ}^{5}$، $\text{عہ}^{7}$، $\text{عہ}^{11}$ رکھنے اور عہ کے قوت نماؤں سے ۱۲ کے ضعفوں کو خارج کرنے سے ہمیں حسب ذیل سلسلے بشمول سلسلہ بالا ملینگے

$$\begin{matrix} \text{عہ}، & \text{عہ}^{5}، & \text{عہ}^{7}، & \text{عہ}^{11} \\ \text{عہ}^{5}، & \text{عہ}، & \text{عہ}^{11}، & \text{عہ}^{7} \\ \text{عہ}^{7}، & \text{عہ}^{11}، & \text{عہ}، & \text{عہ}^{5} \\ \text{عہ}^{11}، & \text{عہ}^{7}، & \text{عہ}^{5}، & \text{عہ} \end{matrix}$$

جہاں ہر صف اور ہر قطار میں وہی اصلیں تکرار پاتی ہیں، صرف انکی ترتیب بدلی ہوئی ہے اس لئے ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ یہ خاصیت چار اصلوں میں سے کسی ایک اصل سے مخصوص نہیں اور یہ ظاہر ہے کہ ۱، ۵، ۷، ۱۱ ایسے عدد ہیں جو ۱۲ کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹے ہیں اور یہ بات اس عام نتیجہ کے مطابق ہے جس کو ہم نے

اس باب میں ثابت کیا ہے۔ لا$^{۱۲}$ − ۱ = ۰ کی سب اصلیں اسکی چار خاص اصلوں عہ، عہ$^{۵}$، عہ$^{۷}$، عہ$^{۱۱}$ میں سے کسی ایک کی قوتوں سے حسب ذیل حاصل ہو سکتی ہیں:۔

عہ، عہ$^{۲}$، عہ$^{۳}$، عہ$^{۴}$، عہ$^{۵}$، عہ$^{۶}$، عہ$^{۷}$، عہ$^{۸}$، عہ$^{۹}$، عہ$^{۱۰}$، عہ$^{۱۱}$، ۱

عہ$^{۵}$، عہ$^{۱۰}$، عہ$^{۳}$، عہ$^{۸}$، عہ، عہ$^{۶}$، عہ$^{۱۱}$، عہ$^{۴}$، عہ$^{۹}$، عہ$^{۲}$، عہ$^{۷}$، ۱

عہ$^{۷}$، عہ$^{۲}$، عہ$^{۹}$، عہ$^{۴}$، عہ$^{۱۱}$، عہ$^{۶}$، عہ، عہ$^{۸}$، عہ$^{۳}$، عہ$^{۱۰}$، عہ$^{۵}$، ۱

عہ$^{۱۱}$، عہ$^{۱۰}$، عہ$^{۹}$، عہ$^{۸}$، عہ$^{۷}$، عہ$^{۶}$، عہ$^{۵}$، عہ$^{۴}$، عہ$^{۳}$، عہ$^{۲}$، عہ، ۱

۳ — ثابت کرو کہ لا$^{۱۵}$ − ۱ = ۰ کی خاص اصلیں مساوات

(98) لا$^{۸}$ − لا$^{۷}$ + لا$^{۵}$ − لا$^{۴}$ + لا$^{۳}$ − لا + ۱ = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۴ — ثابت کرو کہ مثال ماسبق کی آٹھ اصلیں مساوات لا$^{۲}$ + لا + ۱ = ۰ کی دو اصلوں کو مساوات

لا$^{۴}$ + لا$^{۳}$ + لا$^{۲}$ + لا + ۱ = ۰

کی چار اصلوں سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۵ — بارہویں درجہ کی مساوات بناؤ جس کی اصلیں لا$^{۱۲}$ − ۱ = ۰ کی خاص اصلیں ہوں اور اسکو چھٹے درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

جواب:۔ لا$^{۶}$ − لا$^{۵}$ − ۶ لا$^{۴}$ + ۶ لا$^{۳}$ + ۸ لا$^{۲}$ − ۸ لا + ۱ = ۰

## ۵۴ — ثنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا۔

ہم عام سے عام ثنائی مساوات

لا$^{ن}$ = ا + ب $\sqrt{-۱}$

لیتے ہیں جہاں ا اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔

فرض کرو کہ ا = ر جم عہ، ب = ر جب عہ

تو لا$^{ن}$ = ر (جم عہ + $\sqrt{-۱}$ جب عہ)

اب اگر ر (جم طہ + $\sqrt{-۱}$ جب طہ)

اس مساوات کی ایک اصل ہو تو ڈیموائر کے مسئلہ سے

$$ر^{ن} \left( جم\ ن\ طہ + \sqrt{-۱}\ جب\ ن\ طہ \right) = ٮ \left( جم\ عہ + \sqrt{-۱}\ جب\ عہ \right)$$

اور اسلئے

$$ر^{ن}\ جم\ ن\ طہ = ٮ\ جم\ عہ$$

$$ر^{ن}\ جب\ ن\ طہ = ٮ\ جب\ عہ$$

ان کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$ر^{۲ن} = ٮ^{۲} \quad یعنی \quad ر^{ن} = ٮ$$

جہاں ہم ر اور ٮ دونوں کو مثبت لیتے ہیں کیونکہ زیر بحث جملوں میں اُس جزو ضربی کو ہمیشہ مثبت لیا جا سکتا ہے جس میں زاویہ واقع ہوتا ہے۔

پس

$$جم\ ن\ طہ = جم\ عہ،\ جب\ ن\ طہ = جب\ عہ$$

اور اس لئے

$$ن\ طہ = عہ + ۲\ ک\ \pi$$

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ پس مفروضہ ن ویں اصل کی عام شکل ہوگی (99)

$$\sqrt[ن]{ٮ} \left( جم\ \frac{عہ + ۲ک\pi}{ن} + \sqrt{-۱}\ جب\ \frac{عہ + ۲ک\pi}{ن} \right)$$

اس جملہ میں ک کو عددوں کے سلسلہ $-\infty$ اور $+\infty$ کے درمیان کوئی ن متصلہ قیمتیں دینے سے تمام ن ویں اصلیں حاصل ہونگی اور یہ اصلیں تعداد میں ن سے زیادہ نہیں ہونگی کیونکہ وہ ایک دَور پورا ہونے کے بعد تکرار پائینگی۔

ن ویں اصل کے جملہ کو ہم شکل

$$\left\{ \sqrt[ن]{ٮ} \left( جم\ \frac{عہ}{ن} + \sqrt{-۱}\ جب\ \frac{عہ}{ن} \right) \right\} \left\{ جم\ \frac{۲ک\pi}{ن} + \sqrt{-۱}\ جب\ \frac{۲ک\pi}{ن} \right\}$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ ٮ = ۱ اور عہ = ۰ تو مساوات

$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ ہو جائیگی $\text{لا}^{\text{ن}} = 1 + 0 \times \sqrt{-1}$ - اسلئے $1 + 0 \times \sqrt{-1}$
یا اکائی کے ن ویں جذر کی عام شکل ہوگی

$$\text{جم}\ \frac{2\text{ک}\,\pi}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{2\text{ک}\,\pi}{\text{ن}}$$

اگر ہم ک کو کوئی متعین قیمت دیں مثلاً صفر تو

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\ \frac{\text{ع}}{\text{ن}} + \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)$$

$\text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ کا ایک ن واں جذر ہوگا۔

اس لئے پچھلے ضابطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی خیالی مقدار کے تمام ن ویں جذر ان میں سے کسی ایک جذر کو اکائی کے ن ویں جذروں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں ۔

ثنائی مساواتوں

$$\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}\ ،\ \text{اور}\ \text{لا}^{\text{ن}} = \text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1}$$

کو ایک ساتھ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سہ رقمی

$$\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{ر}\ \text{جم}\ \text{ع} \times \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ر}^2$$

کے اجزائے ضربی

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\ \frac{\text{ع} + 2\text{ک}\,\pi}{\text{ن}} \pm \sqrt{-1}\ \text{جب}\ \frac{\text{ع} + 2\text{ک}\,\pi}{\text{ن}}\right\}$$

ہیں جہاں ک قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ...، (ن-۱) اختیار کرتا ہے۔

## مثالیں

(100) ۱۔ مساوات $\text{لا}^3 - 1 = 0$ کو حل کرو۔

اسکو لا − ۱ سے تقسیم کرو تو یہ متکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل ہو جائیگی پھر ی = لا + $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے کعبی

$$ی^{۳} + ی^{۲} - ۲ی - ۱ = ۰$$

حاصل ہوگا جس کو حل کرنے سے دی ہوئی مساوات کا حل ملجائیگا ۔

۲ ــ $(لا + ۱)^{۷} - لا^{۷} - ۱$ کو اجزائے ضربی میں تحویل کرو ۔

**جواب** :۔ $۷ لا (لا + ۱)(لا^{۲} + لا + ۱)^{۲}$

۳ ــ وہ مساوات معلوم کرو جس کے حل پر ثنائی مساوات $لا^{۱۱} - ۱ = ۰$ کا حل منحصر ہے ۔

**جواب** :۔ $ی^{۵} + ی^{۴} - ۴ی^{۳} - ۳ی^{۲} + ۳ی + ۱ = ۰$

۴ ــ اگر ثنائی مساوات کو (لا − ۱، لا + ۱، یا $لا^{۲} - ۱$ سے تقسیم کرکے) متکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ تحویل شدہ مساوات کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں ۔ (دیکھو صفحہ (۴۲) مثالیں ۱۵، ۱۶) ۔

۵ ــ اگر اس تحویل شدہ مساوات کو ی = لا + $\frac{۱}{لا}$ رکھ کر تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ ی میں مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور وہ −۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہونگی ۔

کیونکہ لا میں دی ہوئی مساوات کی اصلیں جم ع + $\sqrt{-۱}$ جب ع شکل کی ہونگی (دیکھو دفعہ ۵۴) ۔ پس لا + $\frac{۱}{لا}$ کی شکل ۲ جم ع ہوگی اور اسکی قیمت حقیقی اور −۲ اور ۲ کے درمیان ہوگی ۔

۶ ــ ثابت کرو کہ مساوات ذیل متکافی ہے ۔ اس کو حل کرو :۔

$$۴(لا^{۲} - لا + ۱)^{۳} - ۲۷ لا^{۲}(لا - ۱)^{۲} = ۰$$

**جواب** :۔ اسکی اصلیں ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، −۱، −۱ ہیں

۷ ــ مساوات $لا^{۹} - ۱ = ۰$ کی سب اصلیں معلوم کرو ۔

اسکا حل تین کعبی مساواتوں

$$لا^{۳} - ۱ = ۰ ،\ لا^{۳} - س = ۰ ،\ لا^{۳} - س^{۲} = ۰$$

کے حل پر منحصر ہے جہاں سہ، سہ$^{۲}$ اکائی کے خیالی جذر الکعب ہیں۔ اس طرح دی ہوئی مساوات کی نو اصلیں ہونگی

$$۱،\ \text{سہ}^{\frac{۱}{۳}}،\ \text{سہ}^{\frac{۲}{۳}}،\ \text{سہ}،\ \text{سہ}^{\frac{۴}{۳}}،\ \text{سہ}^{\frac{۵}{۳}}،\ \text{سہ}^{۲}،\ \text{سہ}^{\frac{۷}{۳}}،\ \text{سہ}^{\frac{۸}{۳}}$$

۱، سہ، سہ$^{۲}$ کو چھوڑ کر باقی چھ اصلیں دی ہوئی مساوات کی خاص اصلیں ہونگی اور یہ اصلیں چھ درجی مساوات

$$\text{لا}^{۶} + \text{لا}^{۳} + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

۸ — دفعہ ۵۳ کی مثال ۳ میں آٹھویں درجہ کی مساوات کو $\text{ی} = \text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$ کے اندراج سے تحویل کیا جائے تو مساوات

$$\text{ی}^{۴} - \text{ی}^{۳} - ۴\,\text{ی}^{۲} + ۴\,\text{ی} + ۱ = ۰$$

حاصل ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس مساوات کی اصلیں ہیں (101)

$$۲\,\text{جم}\,\frac{۲\pi}{۱۵}،\ ۲\,\text{جم}\,\frac{۴\pi}{۱۵}،\ ۲\,\text{جم}\,\frac{۸\pi}{۱۵}،\ ۲\,\text{جم}\,\frac{۱۴\pi}{۱۵}$$

۹ — مساوات

$$۴\,\text{لا}^{۴} - ۸۵\,\text{لا}^{۳} + ۳۵۷\,\text{لا}^{۲} - ۳۴۰\,\text{لا} + ۶۴ = ۰$$

کو منکافی مساوات میں تحویل کرو اور اسکو حل کرو۔

فرض کرو $\text{ی} = \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{۲}{\text{لا}}$

**جواب:-** $\frac{۱}{۴}$، ۱، ۴، ۱۶

۱۰ — مساوات

$$\text{لا}^{۴} + \text{م}\,\text{ف}\,\text{لا}^{۳} + \text{م}^{۲}\,\text{ق}\,\text{لا}^{۲} + \text{م}^{۳}\,\text{ف}\,\text{لا} + \text{م}^{۴} = ۰$$

کو حل کرو۔

اسکی اصلوں کو م سے تقسیم کرو تو منکافی مساوات حاصل ہوگی۔

۱۱ — اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کی ایک خیالی اصل ع ہو جہاں ن عدد مفرد ہے تو

ثابت کرو کہ

(۱ - عہ) (۱ - عہ$^{2}$) (۱ - عہ$^{3}$) ........ (۱ - عہ$^{n}$) = ن

۱۲ــــ ثابت کرو کہ کعبی مساوات فوراً متکافی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے اگر اسکے سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ کا ربط موجود ہو۔

۱۳ــــ ثابت کرو کہ چار درجی فوراً متکافی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے اگر سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کا ربط موجود ہو۔

۱۴ــــ وہ کعبی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

عہ + عہ$^{6}$، عہ$^{3}$ + عہ$^{4}$، عہ$^{2}$ + عہ$^{5}$

جہاں عہ، مساوات لا$^{7}$ - ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل ہے۔

**جواب:-** لا$^{3}$ + لا$^{2}$ - ۲ لا - ۱ = ۰

جب اس کعبی کی اصلیں معلوم ہو جاتی ہیں تو مساوات لا$^{7}$ - ۱ = ۰ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ کعبی کی تین اصلیں لا$_{1}$، لا$_{2}$، لا$_{3}$ ہیں تب لا$^{2}$ - لا$_{1}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ اور عہ$^{6}$، لا$^{2}$ - لا$_{2}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ$^{3}$ اور عہ$^{4}$ اور لا$^{2}$ - لا$_{3}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ$^{2}$ اور عہ$^{5}$ ہونگی۔ یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ان کو تقریبی طور پر دسویں باب کے طریقوں کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۵ــــ وہ کعبی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

عہ + عہ$^{8}$ + عہ$^{12}$ + عہ$^{5}$، عہ$^{2}$ + عہ$^{3}$ + عہ$^{11}$ + عہ$^{10}$، عہ$^{4}$ + عہ$^{6}$ + عہ$^{9}$ + عہ$^{7}$

جہاں عہ، مساوات لا$^{13}$ - ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل ہے۔

**جواب:-** لا$^{3}$ + لا$^{2}$ - ۴ لا + ۱ = ۰

گذشتہ مثال کی طرح یہاں بھی جب کعبی کی اصلیں (جو سب حقیقی ہیں) معلوم ہو جاتی ہیں تو تنائی مساوات لا$^{13}$ - ۱ = ۰ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ کعبی کی اصلیں لا$_{1}$، لا$_{2}$، لا$_{3}$ ہیں۔ اب یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ لا$^{2}$ - لا$_{1}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ + عہ$^{12}$ اور عہ$^{8}$ + عہ$^{5}$، لا$^{2}$ - لا$_{2}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ$^{2}$ + عہ$^{11}$ اور عہ$^{3}$ + عہ$^{10}$، اور لا$^{2}$ - لا$_{3}$ لا + ۱ = ۰ کی اصلیں عہ$^{4}$ + عہ$^{9}$ اور عہ$^{6}$ + عہ$^{7}$ ہیں۔ جب

اِن دو درجی مساواتوں کو حل کر لیا جاتا ہے تو اصلوں کا ہر زوج $\text{عہ}$، $\text{عہ}^{۱۲}$؛ $\text{عہ}^{۸}$، $\text{عہ}^{۵}$ وغیرہ ایک دوسرے دو درجی کے حل سے معلوم کیا جا سکتا ہے جیسا کہ مثال ماسبق میں بتایا گیا۔

102) **۱۶** — $\text{لا}^{۱۷} - ۱ = ۰$ کا حل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کرو۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کی ایک خیالی اصل $\text{عہ}$ ہے۔ دو درجی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\text{عہ}_{۱} \equiv \text{عہ} + \text{عہ}^{۹} + \text{عہ}^{۱۳} + \text{عہ}^{۱۵} + \text{عہ}^{۱۶} + \text{عہ}^{۸} + \text{عہ}^{۴} + \text{عہ}^{۲} ،$$

$$\text{عہ}_{۲} \equiv \text{عہ}^{۳} + \text{عہ}^{۱۰} + \text{عہ}^{۵} + \text{عہ}^{۱۱} + \text{عہ}^{۱۴} + \text{عہ}^{۷} + \text{عہ}^{۱۲} + \text{عہ}^{۶}$$

اب بہ آسانی معلوم ہوگا کہ $\text{عہ}_{۱}\text{عہ}_{۲} = ۴(\text{عہ}_{۱} + \text{عہ}_{۲}) = -۴$، پس $\text{لا}^{۲} + \text{لا} - ۴ = ۰$ کی اصلیں $\text{عہ}_{۱}$ اور $\text{عہ}_{۲}$ ہیں اور اس دو درجی کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{بہ}_{۱} \equiv \text{عہ} + \text{عہ}^{۱۳} + \text{عہ}^{۱۶} + \text{عہ}^{۴} \\ \text{بہ}_{۲} \equiv \text{عہ}^{۹} + \text{عہ}^{۱۵} + \text{عہ}^{۸} + \text{عہ}^{۲} \end{array}\right\} ، \quad \left.\begin{array}{l} \text{جبہ}_{۱} \equiv \text{عہ}^{۳} + \text{عہ}^{۵} + \text{عہ}^{۱۴} + \text{عہ}^{۱۲} \\ \text{جبہ}_{۲} \equiv \text{عہ}^{۱۰} + \text{عہ}^{۱۱} + \text{عہ}^{۷} + \text{عہ}^{۶} \end{array}\right\}$$

تو یہ معلوم ہوگا کہ $\text{لا}^{۲} - \text{عہ}_{۱}\text{لا} - ۱ = ۰$ کی اصلیں $\text{بہ}_{۱}$، $\text{بہ}_{۲}$ اور $\text{لا}^{۲} - \text{عہ}_{۲}\text{لا} - ۱ = ۰$ کی اصلیں $\text{جبہ}_{۱}$، $\text{جبہ}_{۲}$ ہیں۔ پھر انہیں سے ہر ایک کو دو حصوں میں جدا کرنے سے اور دو درجی بنانے سے جس کی اصلیں مثلاً $\text{عہ} + \text{عہ}^{۱۶}$، اور $\text{عہ}^{۱۳} + \text{عہ}^{۴}$ وغیرہ ہوں دو دو اصلوں کے مجموعے معلوم کئے جا سکتے ہیں اور پھر آخر میں دو درجی مساواتوں کے حل سے خود اصلوں کو معلوم کیا جا سکتا ہے جیسا کہ گذشتہ مثالوں میں کیا گیا۔

یہ اور گذری ہوئی دو مثالیں گاس (Gauss) کے طریقہ کی تمثیلات ہیں جو ثنائی مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = ۰$ کو جبری طور پر حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جبکہ ن عدد مفرد ہو۔ اس قسم کی مساوات کا حل ایسی مساواتوں کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے جن کا درجہ اُس بڑے سے بڑے مفرد عدد سے اعلیٰ تر نہیں ہوتا جو ن - ۱ کا جزو ضربی ہے۔ اگر ن = ۱۳ تو حل کعبی کے حل پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ $\text{ن} - ۱ = ۳ \times ۲^{۲}$۔ اگر ن = ۱۷ تو حل دو درجی مساواتوں کے حل میں تحویل ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ن} - ۱ = ۲^{۴}$۔ گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے ن - ۱ خیالی اصلوں کو ہر صورت میں ان میں سے کسی ایک کی قوتوں کی بموجب کسی مناسب ترتیب میں مرتب کرنا ضروری ہے۔ عدد مفرد ن کی "ابتدائی اصل"

(Primitive root ) میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر اسکو صفر سے ن-۲ تک متواتر قوتوں میں اُٹھایا جائے اور ہر صورت میں ن سے تقسیم کیا جائے تو ن-۱ باقی سب کے سب مختلف ہوتے ہیں۔ (Serret's Cours d' Algebre Superieure vol. II )۔ کسی مفرد عدد کی ایسی ابتدائی اصلیں متعدد ہوتی ہیں مثلاً ۱۳ کی ۲، ۶، ۷ اور ۱۱، ۱۷ کی ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴۔ گاس خیالی اصلوں کو اس طرح مرتب کرتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک اصل عہ کے متواتر قوت نما، صفر سے ن-۲ تک، ن کی کسی ابتدائی اصل کی متواتر قوتیں ہوں۔ مثلاً ۱۳ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل لی جائے اور ۲ کی متواتر قوتوں کو ۱۳ سے تقسیم کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا:۔

۱، ۲، ۴، ۸، ۳، ۶، ۱۲، ۱۱، ۹، ۵، ۱۰، ۷

اور اس لئے یہ باقی ترتیب کے ساتھ عہ کی متواتر قوتیں ہیں جبکہ قوتوں کو جو ۱۳ سے متجاوز ہوں مساوات عہ$^{۱۳}$ = ۱ کے ذریعہ تحویل کر لیا گیا ہو۔ اگر ۱۷ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کے ساتھ بھی یہی سلوک کیا جاتا تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا:۔

۱، ۳، ۹، ۱۰، ۱۳، ۵، ۱۵، ۱۱، ۱۶، ۱۴، ۸، ۷، ۴، ۱۲، ۲، ۶

ان سلسلوں کا اوپر کے مفروضات کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ پہلی صورت میں (یعنی ن = ۱۳) بارہ اصلیں چار چار کے تین مجموعوں میں منقسم ہوئی تھیں اور دوسری صورت میں سولہ اصلیں آٹھ آٹھ کے دو مجموعوں میں۔ کسی صورت میں تقسیم کا طریقہ ن-۱ کے اجزائے ضربی کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے اور عام صورت میں یہ بتانا مشکل نہیں کہ اس قسم کے کسی دو گروہوں کا حاصل ضرب دو یا اس سے زیادہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ طالب علم کو اوپر کی مخصوص مثالوں سے واضح ہو گیا ہوگا۔

کسی خاص صورت میں گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے صرف چھوٹی سے (103)
چھوٹی ابتدائی اصل کا معلوم ہونا ضروری ہے اور اس کو بغیر کسی مشکل کے آزمائش سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ تین سادہ ترین مفرد عددوں ۲، ۳، ۵ میں سے کوئی نہ کوئی ۱۰۰ سے

چھوٹے ہر مفرد عدد کی ابتدائی اصل ہے سوائے ۴۱ اور ۷۱ کے جن کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصلیں علی الترتیب ۶ اور ۷ ہیں۔ تمام ابتدائی اصلوں کو معلوم کرنیکے طریقے پیسرے کی متذکرۂ بالا تصنیف میں دیئے گئے ہیں۔

۱۷ — آزمائش سے ۱۹ کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل معلوم کرو۔ اور اسلئے بتاؤ کہ مساوات $\text{لا}^{۱۹} - ۱ = ۰$ کو کس طرح حل کیا جا سکتا ہے۔

یہ بہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ ۲ چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل ہے اور ۱۹ سے تقسیم کرنیکے بعد جو باقی حاصل ہوتے ہیں وہ اس دوران میں معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ $۱۸ = ۳^{۲} \times ۲$ اسلئے حل کعبی اور دو درجی مساواتوں پر منحصر ہوگا۔ پہلا کعبی ایسی مساوات بنانے سے معلوم ہوگا جسکی اصلیں ہیں

$$\text{عہ} + \text{عہ}^{۸} + \text{عہ}^{۷} + \text{عہ}^{۱۸} + \text{عہ}^{۱۱} + \text{عہ}^{۱۲} ،$$

$$\text{عہ}^{۲} + \text{عہ}^{۱۶} + \text{عہ}^{۱۴} + \text{عہ}^{۱۷} + \text{عہ}^{۳} + \text{عہ}^{۵} ،$$

$$\text{عہ}^{۴} + \text{عہ}^{۱۳} + \text{عہ}^{۹} + \text{عہ}^{۱۵} + \text{عہ}^{۶} + \text{عہ}^{۱۰}$$

۱۸ — ثابت کرو کہ اُن ثنائی مساواتوں میں سے جنکا درجہ ایک مفرد عدد ہو اور حل دو درجی مساواتوں پر منحصر ہو $\text{لا}^{۱۷} - ۱ = ۰$ کے بعد کم سے کم درجہ والی مساوات $\text{لا}^{۲۵۷} - ۱ = ۰$ ہے۔

۲۵۷ کے بعد آنے والا مفرد عدد جو اس شرط کو پورا کرے کہ $\text{ن} - ۱ = ۲^{\text{ک}}$ (جہاں ک صحیح عدد ہے) ۶۵۵۳۷ ہے۔ اسلئے ہمیں ایسے عددوں کا سلسلہ ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ ..... ملیگا۔ گاس (*Disquisitiones Arithmeticæ* دفعہ ۳۶۵ میں) لکھتا ہے کہ ہندسی اعمال سے دائرہ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنا یا ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع بنانا ناممکن ہے جبکہ ن انہیں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔

۱۹ — اگر مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \dots\dots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلیں $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$، $\text{عہ}_{۳}$ ....... ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\text{عہ}_{۱} + \frac{۱}{\text{عہ}_{۱}} ،\ \text{عہ}_{۲} + \frac{۱}{\text{عہ}_{۲}} ،\ \dots\dots ،\ \text{عہ}_{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{عہ}_{\text{ن}}}$$

متماثلہ

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots\ldots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} \equiv (لا - ع_{۱})(لا - ع_{۲})\ldots(لا - ع_{ن})$$

میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے (دیکھو دفعہ ۳۲)

$$ب_{ن} لا^{ن} + ب_{ن-۱} لا^{ن-۱} + \ldots\ldots + ب_{۲} لا^{۲} + ب_{۱} لا + ۱ \equiv ب_{ن} (لا - \frac{۱}{ع_{۱}})(لا - \frac{۱}{ع_{۲}})\ldots(لا - \frac{۱}{ع_{ن}})$$

اِن متماثلات کو باہم ضرب دیکر $لا^{ن}$ سے تقسیم کرو تو بائیں طرف کے اجزا شکل $لا + \frac{۱}{لا} - (ع + \frac{۱}{ع})$ اختیار کرینگے۔ فرض کرو $لا + \frac{۱}{لا} = ی$ تو دفعہ ۴۵ کے روابط کی مدد سے دائیں جانب کے جملہ کو ی میں ن ویں درجہ کے کثیر الارقام کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔

۲۰ — مساوات

$$ا_{۰} لا^{۴} + ۴ ا_{۱} لا^{۳} + ۶ ا_{۲} لا^{۲} + ۴ ا_{۳} لا + ا_{۴} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma ع^{۲} ب^{۲} (ج - ض)^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو مثال ۱۹ صفحہ ۱۴۷، کے نتیجہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے اگر اصلوں کو ان کے (104)
متکافیوں میں تبدیل کیا جائے استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\Sigma (\frac{۱}{ع} - \frac{۱}{ب})^{۲}$ کی قیمت معلوم کیجائے اور $ع^{۲} ب^{۲} ج^{۲} ض^{۲}$ سے ضرب دیا جائے جو $\frac{ا_{۴}^{۲}}{ا_{۰}^{۲}}$ کے مساوی ہے

جواب:- $ا_{۰}^{۲} \Sigma ع^{۲} ب^{۲} (ج - ض)^{۲} = ۴۸ (ا_{۳}^{۲} - ا_{۲} ا_{۴})$

اُن متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں سے جو تیسرے باب میں درج ہیں، دوسرے متعدد متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں متذکرہ بالا عمل سے حاصل کیجا سکتی ہیں۔

۲۱ — مساوات

$$ا_{۰} لا^{ن} + ن ا_{۱} لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲} ا_{۲} لا^{ن-۲} + \ldots + ن ا_{ن-۱} لا + ا_{ن} = ۰$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل $\sum (ع_1 - ع_2)^2 ع_3^2 ع_4^2 \ldots ع_ن^2$ کی قیمت معلوم کرو۔

ہمیں بہ آسانی $ا_0^2 \sum (ع_1 - ع_2)^2 = ن^2 (ن-1)(ا_1^2 - ا_0 ا_2)$ حاصل ہوتا ہے

اور اصلوں کو اِن کے متکافیوں میں تبدیل کرنے سے

$$ا_ن^2 \sum (ع_1 - ع_2)^2 ع_3^2 ع_4^2 \ldots ع_ن^2 = ن^2 (ن-1)(ا_{ن-1}^2 - ا_{ن-2} ا_ن)$$

۲۲ — ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^5 - 5 ف لا^3 + 5 ف^2 لا + 2 ق = 0$$

کی اصلیں ہیں

$$\sqrt[5]{ا} + \sqrt[5]{ب}،\ ط \sqrt[5]{ا} + ط^4 \sqrt[5]{ب}،\ ط^2 \sqrt[5]{ا} + ط^3 \sqrt[5]{ب}$$

$$ط^4 \sqrt[5]{ا} + ط \sqrt[5]{ب}،\ ط^3 \sqrt[5]{ا} + ط^2 \sqrt[5]{ب}$$

جہاں $\sqrt[5]{ا}\,\sqrt[5]{ب} = ف$، $ا + ب = -2ق$ اور ط اکائی کا پانچواں جذر ہے۔

**نوٹ:**- جب کثیر درجی مساوات اس شکل میں تحویل ہوتی ہے تو اُسکو فوراً حل کیا جاسکتا ہے۔

۲۳ — مثال ماسبق میں اصلوں کی بجائے شلثی جملے لکھو اور ف کو مثبت فرض کرکے ثابت کرو کہ

(۱) جب، $ف^5 < ق^2$ تو ایک اصل حقیقی اور چار اصلیں خیالی ہیں۔

(۲) جب، $ف^5 > ق^2$ تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

(۳) جب، $ف^5 = ق^2$ تو ایک جزو ضربی دو درجی جملہ کا مربع ہے۔

۲۴ — اگر ط اکائی کا پانچواں جذر ہو تو حاصل ضرب

$$(عہ + یہ + جہ)(عہ + ط یہ + ط^4 جہ)(عہ + ط^2 یہ + ط^3 جہ)(عہ + ط^3 یہ + ط^2 جہ)$$
$$(عہ + ط^4 یہ + ط جہ)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :- عہ$^{۵}$ + بہ$^{۵}$ + جہ$^{۵}$ - ۵ عہ$^{۲}$ بہ جہ (عہ$^{۲}$ - بہ جہ)

۲۵ —— وہ چار درجی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

عہ + ۲ عہ$^{۴}$ ، عہ$^{۲}$ + ۲ عہ$^{۳}$ ، عہ$^{۳}$ + ۲ عہ$^{۲}$ ، عہ$^{۴}$ + ۲ عہ

جہاں لا$^{۵}$ - ۱ = ۰ کی ایک خیالی اصل عہ ہے -

جواب :- لا$^{۴}$ + ۳ لا$^{۳}$ - لا$^{۲}$ - ۳ لا + ۱۱ = ۰

# چھٹا باب

## کعبی اور چار درجی کا جبری حل

**۵۵ — مساواتوں کا جبری حل ۔** کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل پر بحث کرنے سے پیشتر ہم چند تمہیدی باتیں بیان کرینگے تاکہ طالب علم اُن عام اصولوں سے اچھی طرح واقف ہو جائے جن پر اِن مساواتوں کا جبری حل منحصر ہوتا ہے ۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھکر ہم اس دفعہ میں دو درجی مساوات (مساوات درجہ دوم) کے حل کے تین طریقے درج کرینگے اور ساتھ ہی یہ بھی بیان کرتے جائینگے کہ کس طرح اِن طریقوں کو کعبی اور چار درجی مساواتوں کا جبری حل حاصل کرنے میں وسیع کیا جا سکتا ہے ۔ بعد کے دفعات میں ہم اِن اصولوں کی پوری تشریح کرینگے ۔

(۱) **حل کا پہلا طریقہ ۔** اصل کیلئے عام شکل ف + $\sqrt{ق}$ فرض کرنے سے

چونکہ جملہ ف + $\sqrt{ق}$ کی دو اور صرف دو قیمتیں ہیں جبکہ جذر المربع کو دوہری علامت (±) کے ساتھ لیا جاتا ہے اسلئے دو درجی کی اصل کے لئے ایسے جملہ کو فرض کرنا بالکل درست ہے ۔ اسلئے لا = ف + $\sqrt{ق}$ رکھکر اس کو منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$لا^{۲} - ۲ف\,لا + ف^{۲} - ق = ۰$$

اب اگر یہ دی ہوئی دو درجی مساوات

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف}\ \text{لا} + \text{ق} = ۰$$

کے ساتھ متماثل ہو تو

$$۲\ \text{ف} = -\text{ف} \text{ ، } \text{ف}^{۲} - \text{ق} = \text{ق}$$

اسلئے $$\text{لا} = \text{ف} + \sqrt{\text{ق}} = \frac{-\text{ف} \pm \sqrt{\text{ف}^{۲} - ۴\ \text{ق}}}{۲}$$

جو دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

کعبی مساوات کی صورت میں ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\sqrt[۳]{\text{ف}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{\text{ف}}} \quad \text{اور} \quad \sqrt[۳]{\text{ف}}\ \sqrt[۳]{\text{ق}}\ (\sqrt[۳]{\text{ف}} + \sqrt[۳]{\text{ق}})$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو حل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذر الکعبوں کو عام سے عام صورت میں لیا جائے۔ (106)

چار درجی مساوات کی صورت میں ہمیں یہ معلوم ہوگا کہ

$$\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \frac{۱}{\sqrt{\text{ف}}\sqrt{\text{ق}}} \text{ ، } \sqrt{\text{ق}}\ \sqrt{\text{ر}} + \sqrt{\text{ر}}\ \sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ف}}\ \sqrt{\text{ق}}$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو حل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں سے لا کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ جذر المربعوں کو دوہری علامت لگا دی جائے۔

## (۲) حل کا دوسرا طریقہ ۔ اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے۔

فرض کرو کہ دو درجی $\text{لا}^{۲} + \text{ف}\ \text{لا} + \text{ق}$ کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرنا مطلوب ہے۔ اس مقصد کے لئے ہم اسکو شکل

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف}\ \text{لا} + \text{ق} + \text{ط} - \text{ط} \text{ ،}$$

میں رکھتے ہیں اور ط کو اس طرح متعین کرتے ہیں کہ

$$\text{لا}^{۲} + \text{ف}\ \text{لا} + \text{ق} + \text{ط}$$

کامل مربع ہو سکے۔ اب یہ جملہ کامل مربع ہوگا اگر

$$طہ + ق = \frac{ف^2}{۴} \quad یعنی \quad طہ = \frac{ف^2 - ۴ق}{۴}$$

اس قیمت کو طہ کی بجائے درج کیا جائے تو

$$لا^2 + ف\,لا + ق = \left(لا + \frac{ف}{۲}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{ف^2 - ۴ق}}{۲}\right)^2$$

پس ہم نے دو درجی کو شکل $ع^2 - و^2$ میں تحویل کر دیا جس کے مفرد اجزائے ضربی $ع + و$ اور $ع - و$ ہیں۔

اسی طرح ہم کعبی کو شکل

$$(ل\,لا + م)^3 - (لَ\,لا + مَ)^3 \quad یا \quad ع^3 - و^3$$

میں تحویل کرینگے اور اِسکا حل مساواتوں $ع - و = ۰$، $ع - سہ\,و = ۰$، $ع - سہ^2 و = ۰$ سے حاصل کرینگے۔

یہ بھی دکھایا جائیگا کہ چار درجی کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے شکلوں

$$(ل\,لا^2 + م\,لا + ن)^2 - (لَ\,لا^2 + مَ\,لا + نَ)^2$$

$$(لا^2 + ف\,لا + ق)\,(لا^2 + فَ\,لا + قَ)$$

107) میں سے کسی ایک میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اور پھر دو دو درجی مساواتوں کو حل کرنے سے چار درجی کا مکمل حل معلوم کیا جا سکتا ہے یعنی پہلی صورت میں $ل\,لا^2 + م\,لا + ن = \pm (لَ\,لا^2 + مَ\,لا + نَ)$ کو اور دوسری صورت میں $لا^2 + ف\,لا + ق = ۰$ اور $لا^2 + فَ\,لا + قَ = ۰$ کو حل کرنے سے دئے ہوئے چار درجی کا مکمل حل معلوم ہوتا ہے۔

## (۳) حل کا تیسرا طریقہ۔ اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے۔

دو درجی مساوات $لا^2 + ف\,لا + ق = ۰$ پر غور کرو جس کی اصلیں عہ اور بہ ہیں۔ اصلوں کے درمیان ربط ملینگے

$$عہ + بہ = - ف،$$

$$عہ\,بہ = ق$$

اگر ہم اِن مساواتوں سے عہ اور بہ کو متعین کرنے کی کوشش کریں تو ہم ابتدائی مساوات پر پہنچ جائینگے (دیکھو دفعہ ۲۴) - لیکن اگر ہمیں اصلوں اور سِروں کے درمیان کوئی اور ربط معلوم ہو جائے جو $\text{ل عہ} + \text{م بہ} = \text{فا}(\text{ف}، \text{ق})$ کی شکل کا ہو تو ہم آسانی سے عہ اور بہ کو اس مساوات اور مساوات $\text{عہ} + \text{بہ} = -\text{ف}$ سے معلوم کر سکینگے -

دو درجی کی صورت میں مطلوبہ مساوات معلوم کرنے میں کوئی دقت نہیں ہے کیونکہ صریحاً

$$(\text{عہ} - \text{بہ})^{۲} = \text{ف}^{۲} - ۴\,\text{ق}$$

اور اسلئے

$$\text{عہ} - \text{بہ} = \sqrt{\text{ف}^{۲} - ۴\,\text{ق}}$$

کعبی مساوات $\text{لا}^{۳} + \text{ف لا}^{۲} + \text{ق لا} + \text{ر} = ۰$ کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کو معلوم کرنیکے لئے مساوات $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = -\text{ف}$ کے علاوہ

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} = \text{فا}(\text{ف}، \text{ق}، \text{ر})$$

کی شکل کی دو مساواتیں مطلوب ہوتی ہیں - آئندہ ہم ثابت کرینگے کہ ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے سے تفاعلوں

$$(\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{۲}\text{جہ})^{۳}،\quad (\text{عہ} + \text{سہ}^{۲}\text{بہ} + \text{سہ جہ})^{۳}$$

کو کعبی کے سِروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور جب اِن تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں تو کعبی کی اصلیں آسانی سے معلوم کیجا سکتی ہیں -

چار درجی مساوات

$$\text{لا}^{۴} + \text{ف لا}^{۳} + \text{ق لا}^{۲} + \text{ر لا} + \text{س} = ۰$$

کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کو معلوم کرنیکے لئے مساوات

$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{ضہ} = -\text{ف}$ کے علاوہ

$$\text{ل عہ} + \text{م بہ} + \text{ن جہ} + \text{ر ضہ} = \text{فا}(\text{ف}، \text{ق}، \text{ر}، \text{س}) \qquad (108)$$

کی شکل کی تین مساواتوں کی ضرورت پڑیگی - دفعہ ۶۶ میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ حسب ذیل تین تفاعلوں

$$(بہ + جہ - عہ - ضہ)^{۲}،\ (جہ + عہ - ضہ - بہ)^{۲}،\ (عہ + بہ - جہ - ضہ)^{۲}$$

کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور جب انکی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو چار درجی مساوات کی اصلیں فوراً حاصل ہو سکتی ہیں۔

**۵۶ ۔ کعبی مساوات کا جبری حل ۔** فرض کرو کہ عام کعبی مساوات

$$ا لا^{۳} + ۳ ب لا^{۲} + ۳ ج لا + د = ۰$$

کو شکل

$$ی^{۳} + ۳ ھ ی + گ = ۰$$

میں رکھا گیا ہے جہاں

$$ی \equiv ا لا + ب،\ ھ \equiv ا ج - ب^{۲}،\ گ \equiv ا^{۲} د - ۳ ا ب ج + ۲ ب^{۳}$$
(دفعہ ۳۶)

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے فرض کرو[۱]

$$ی = \sqrt[۳]{ف} + \sqrt[۳]{ق}$$

اِس کا مکعب لینے سے

$$ی^{۳} = ف + ق + ۳ \sqrt[۳]{ف} \sqrt[۳]{ق} (\sqrt[۳]{ف} + \sqrt[۳]{ق})$$

اِس لئے

$$ی^{۳} - ۳ \sqrt[۳]{ف} \sqrt[۳]{ق}\ ی - (ف + ق) = ۰$$

اب سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\sqrt[۳]{ف} \sqrt[۳]{ق} = - ھ،\ ف + ق = - گ$$

ان مساواتوں سے حاصل ہوگا

[۱] اس حل کو کارڈن کا حل کہتے ہیں۔ دیکھو نوٹ ( اس جلد کے ختم پر۔

$$\text{ف} = \tfrac{1}{2}\left(-\text{گ} + \sqrt{\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}}\right)،\quad \text{ق} = \tfrac{1}{2}\left(-\text{گ} - \sqrt{\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}}\right)$$

(109) اور $\sqrt[3]{\text{ق}}$ کی بجائے اسکی قیمت $\dfrac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}$ درج کرنے سے

$$\text{ی} = \sqrt[3]{\text{ف}} + \frac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}$$

اور یہ مساوات

$$\text{ی}^{3} + 3\,\text{ھ}\,\text{ی} + \text{گ} = 0$$

کا جبری حل ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگر ف کی بجائے ق رکھدیا جائے تو ی کی یہ قیمت نہیں بدلتی کیونکہ ایسا کرنے سے صرف رقموں کا آپس میں تبادلہ ہوتا ہے۔

نیز چونکہ $\sqrt[3]{\text{ف}}$ کی تین قیمتیں $\sqrt[3]{\text{ف}}$، $\text{س}\sqrt[3]{\text{ف}}$، $\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{ف}}$ ہیں جو ان میں سے کسی ایک کو اکائی کے تین جذر الکعبوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہیں اسلئے ی کی تین اور صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنے

$$\sqrt[3]{\text{ف}} + \frac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}،\quad \text{س}\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{س}^{2}\frac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}،\quad \text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{ف}} + \text{س}\frac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}$$

ان قیمتوں کی ترتیب صرف ف کے منتخب شدہ جذر الکعب کی بموجب بدلتی ہے۔

اب اگر ی کی بجائے اس کی قیمت ا لا + ب رکھدیجائے تو

$$\text{ا لا} + \text{ب} = \sqrt[3]{\text{ف}} + \frac{-\text{ھ}}{\sqrt[3]{\text{ف}}}$$

(جہاں ف کی قیمت وہ ہے جو سروں کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے) اور یہ کعبی مساوات

$$\text{ا لا}^{3} + 3\,\text{ب لا}^{2} + 3\,\text{ج لا} + \text{د} = 0$$

کا مکمل جبری حل ہے۔ اسمیں جذر الکعب اور جذر المربع عام سے عام شکل میں ہیں

لئے گئے ہیں ۔

**۵۷ ۔ عددی مساواتوں پر استعمال ۔** اگر کعبی کے سر دئے ہوئے عدد ہوں تو کعبی کا حل جو ہم نے اوپر حاصل کیا ہے دو درجی کے حل کے برخلاف کوئی عملی قیمت نہیں رکھتا حالانکہ جبری حل کے لحاظ سے یہ حل بالکل مکمل ہے ۔

کیونکہ جب کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں تو $گ^2 + ۴ھ^3 = -ک^2$ جو لازماً منفی عدد ہے (دیکھو دفعہ ۴۳) اور ف اور ق کی بجائے انکی قیمتیں

$$\frac{1}{2}\left(-گ \pm ک\sqrt{-1}\right)$$

ضابطہ $\sqrt[3]{ف} + \sqrt[3]{ق}$ میں درج کیجائیں تو کعبی کی اصل کے لئے ہمیں حسب ذیل جملہ ملیگا :- (110)

$$\left(\frac{-گ + ک\sqrt{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-گ - ک\sqrt{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اب ایسے ملتف عددوں کا جذر الکعب نکالنے کے لئے کوئی عام حسابی عمل موجود نہیں ہے اور اسلئے جہانتک کہ حسابی عمل کا تعلق ہے یہ ضابطہ بیکار ہے۔

لیکن جب کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہو تو ضابطہ

$$\left(\frac{-گ + \sqrt{گ^2 + ۴ھ^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-گ - \sqrt{گ^2 + ۴ھ^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

سے ایک عددی قیمت حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں $گ^2 + ۴ھ^3$ مثبت ہے ۔ لیکن یہ عمل بھی عددی کعبی کی حقیقی اصل معلوم کرنیکے لئے بے سود ہے۔

پہلی صورت میں یعنی جب کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے ہم علم مثلث کا استعمال حسب طریقہ ذیل کر سکتے ہیں ۔

فرض کرو $۲\,ر\,جم\,فہ = -گ$ اور $۲\,ر\,جب\,فہ = ک$

تو

$$ف = ر\,و^{فہ\sqrt{-1}}\,,\quad ق = ر\,و^{-فہ\sqrt{-1}}$$

نیز $\text{مس فہ} = -\frac{\text{ک}}{\text{گ}}$ ، اور $\text{ما} = \frac{1}{2}(\text{گ}^2 + \text{ک}^2)^{\frac{1}{2}} = (-\text{ھ})^{\frac{3}{2}}$

اور چونکہ $\text{س} = \text{جم}\,\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\,\text{جب}\,\frac{2\pi}{3} = \text{و}^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$

اس لئے کعبی

$$\text{ی}^3 + 3\,\text{ھ}\,\text{ی} + \text{گ} = 0$$

کی تین اصلیں

$$\sqrt[3]{\text{ماف}} + \sqrt[3]{\text{ماق}} \text{ ، } \text{س}\sqrt[3]{\text{ماف}} + \text{س}^2\sqrt[3]{\text{ماق}} \text{ ، } \text{س}^2\sqrt[3]{\text{ماف}} + \text{س}\sqrt[3]{\text{ماق}}$$

ہو جاتی ہیں

$$2(-\text{ھ})^{\frac{1}{2}}\,\text{جم}\,\frac{\text{فہ}}{3} \text{ ، } -2(-\text{ھ})^{\frac{1}{2}}\,\text{جم}\,\frac{\pi \pm \text{فہ}}{3}$$

اِن ضابطوں سے کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں جیوب اور جیوب التمام کی جدول کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں - یہ طریقہ بھی عملی طور پر کچھ آسان نہیں اور (111) عام طور پر حقیقی اصلوں کو حسابی طریقہ سے محسوب کرنیکے لئے اُن طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے جو آیندہ دسویں باب میں بیان کئے جائینگے -

**۵۸ - کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا -** فرض کرو کہ دیے ہوئے کعبی

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ب}\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{د} \equiv \text{ف}(\text{لا})$$

کو شکل

$$\text{ی}^3 + 3\,\text{ھ}\,\text{ی} + \text{گ}$$

میں رکھا گیا ہے جہاں $\text{ی} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}$

اب فرض کرو

$$\text{ی}^3 + 3\,\text{ھ}\,\text{ی} + \text{گ} \equiv \frac{1}{\text{مہ} - \text{نہ}}\left\{\text{مہ}(\text{ی} + \text{نہ})^3 - \text{نہ}(\text{ی} + \text{مہ})^3\right\} \quad \ldots(1)$$

جہاں مہ اور نہ دریافت شدنی مقداریں ہیں ۔ اس متماثلہ کی بائیں جانب کے جملہ کو مختصر کرو تو وہ ہو جائیگا

$$\text{ی}^{3} - 3\,\text{مہ نہ ی} - \text{مہ نہ}\,(\text{مہ} + \text{نہ})$$

سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{مہ نہ} = -\,\text{ھ}\,,\quad \text{مہ نہ}\,(\text{مہ} + \text{نہ}) = -\,\text{گ}$$

اسلئے

$$\text{مہ} + \text{نہ} = \frac{\text{گ}}{\text{ھ}}\,,\quad \text{مہ} - \text{نہ} = \frac{\text{ا}\sqrt{\Delta}}{\text{ھ}}$$

جہاں $\text{ا}^{2}\Delta \equiv \text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3}$ ، حسب دفعہ ۲۴ ۔

نیز

$$(\text{ی} + \text{نہ})(\text{ی} + \text{مہ}) \equiv \text{ی}^{2} + \frac{\text{گ}}{\text{ھ}}\,\text{ی} - \text{ھ}$$

اسلئے ی کی بجائے اسکی قیمت ا لا + ب رکھنے پر ہمیں (۱) سے حاصل ہوگا

$$\text{ا}^{2}\,\text{ف}(\text{لا}) \equiv \left(\frac{\text{گ} + \text{ا}\Delta^{\frac{1}{2}}}{2\,\Delta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\text{ا لا} + \text{ب} + \frac{\text{گ} - \text{ا}\Delta^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{ھ}}\right)^{3}$$

$$-\left(\frac{\text{گ} - \text{ا}\Delta^{\frac{1}{2}}}{2\,\Delta^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\text{ا لا} + \text{ب} + \frac{\text{گ} + \text{ا}\Delta^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{ھ}}\right)^{3}$$

جو دو مکعبوں کا مطلوبہ فرق ہے ۔

(112) اس متماثلہ کی مدد سے کعبی کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کیا جا سکتا ہے اور کعبی مساوات کا مکمل حل معلوم ہو سکتا ہے ۔ اب ہم مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں مہ اور نہ کی رقوم میں حاصل کرینگے ۔ مساوات

$$(\text{مہ} - \text{نہ})\,\text{ا}^{2}\,\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{مہ}\,(\text{ی} + \text{نہ})^{3} - \text{نہ}\,(\text{ی} + \text{مہ})^{3} = 0$$

کو ثنائی کعبی کے طور پر حل کیا جائے تو ی = ا لا + ب کے لئے ہمیں حسب ذیل تین قیمتیں ملینگی :-

$$\sqrt[3]{\text{مہ}}\,\sqrt[3]{\text{نہ}}\,\left(\sqrt[3]{\text{مہ}} + \sqrt[3]{\text{نہ}}\right),$$

$$\sqrt[3]{\text{مہ}}\,\sqrt[3]{\text{نہ}}\,\left(\text{سہ}\,\sqrt[3]{\text{مہ}} + \text{سہ}^{2}\,\sqrt[3]{\text{نہ}}\right),$$

$$\sqrt[3]{\text{م}}\ \sqrt[3]{\text{ن}}\ (\text{س}^2\sqrt[3]{\text{م}} + \text{س}\sqrt[3]{\text{ن}})$$

اب اگر $\sqrt[3]{\text{م}}$ اور $\sqrt[3]{\text{ن}}$ کی بجائے جذرالکعبوں کا کوئی زوج رکھدیا جائے جو دو سلسلوں

$$\sqrt[3]{\text{م}}،\ \text{س}\sqrt[3]{\text{م}}،\ \text{س}^2\sqrt[3]{\text{م}}$$

$$\sqrt[3]{\text{ن}}،\ \text{س}\sqrt[3]{\text{ن}}،\ \text{س}^2\sqrt[3]{\text{ن}}$$

میں سے ہر ایک سے ایک ایک جذرالکعب منتخب کرکے بنایا گیا ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ ی کی وہی تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان قیمتوں کی صرف ترتیب منتخب شدہ جذرالکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جملہ

$$\sqrt[3]{\text{م}}\ \sqrt[3]{\text{ن}}\ (\sqrt[3]{\text{م}} + \sqrt[3]{\text{ن}})$$

کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذرالکعبوں کو عام سے عام شکل میں لیا جائے۔ اسلئے یہ شکل دفعہ ماسبق کی حاصل شدہ شکل کے علاوہ ایسی شکل ہے جو کعبی مساوات کی اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے۔ دیکھو دفعہ ۵۵ (۱)۔

جب تفاعل (۲) کو (جو اوپر بیان ہوا) مستحیل کرکے مختصر کیا جاتا ہے تو وہ

$$\frac{\text{ا}^2}{\text{ھ}}\left\{(\text{اج} - \text{ب}^2)\text{لا}^2 + (\text{اد} - \text{ب ج})\text{لا} + (\text{ب د} - \text{ج}^2)\right\}$$

ہوجاتا ہے، اسلئے اس دو درجی کے اجزائے ضربی دو ثنائی جملے

$$\text{ا لا} + \text{ب} + \text{م}،\quad \text{ا لا} + \text{ب} + \text{ن}$$

ہیں جو ف (لا) کے مذکورہ بالا جملہ میں دو مکعبوں کے فرق کے طور پر واقع ہوتے ہیں۔

**۵۹ — اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کعبی کا حل۔** چونکہ جملہ (113)

$\frac{1}{3}$ {عہ + بہ + جہ + طہ (عہ + سہ بہ + سہ$^2$ جہ) + طہ$^2$ (عہ + سہ$^2$ بہ + سہ جہ)}

کی تین قیمتیں عہ، بہ، جہ ہیں، جبکہ طہ، قیمتیں ۱، سہ، سہ$^2$ اختیار کرے اسلئے یہ ظاہر ہے کہ اگر تفاعلوں

طہ (عہ + سہ بہ + سہ$^2$ جہ)، طہ$^2$ (عہ + سہ$^2$ بہ + سہ جہ)

کو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکے تو ہم مندرجہ بالا ضابطہ میں ان قیمتوں کو درج کرنے سے کعبی مساوات کا جبری حل معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان تفاعلوں کی قیمت ایک دو درجی مساوات کے حل کرنے سے بالراست حاصل نہیں ہو سکتی کیونکہ اگرچہ مندرجۂ بالا دو تفاعلوں کا حاصل ضرب عہ، بہ، جہ کا ایک منطق تشاکل تفاعل ہے مگر انکا مجموعہ ایسا تفاعل نہیں ہے۔ اس کے باوجود یہ معلوم ہوگا کہ ان دو تفاعلوں کے مکعبوں کا مجموعہ اصلوں کا ایک تشاکل تفاعل ہے اور اس لئے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جیسا کہ ہم اب بتائینگے۔ سہولت کے مدنظر ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں

ل ≡ عہ + سہ بہ + سہ$^2$ جہ

م ≡ عہ + سہ$^2$ بہ + سہ جہ

تو

(طہ ل)$^3$ = ا + ب سہ + ج سہ$^2$،

(طہ$^2$ م)$^3$ = ا + ب سہ$^2$ + ج سہ،

جہاں

ا = عہ$^3$ + بہ$^3$ + جہ$^3$ + ۶ عہ بہ جہ، ب = ۳ (عہ$^2$ بہ + بہ$^2$ جہ + جہ$^2$ عہ)،

ج = ۳ (عہ بہ$^2$ + بہ جہ$^2$ + جہ عہ$^2$)

اس لئے حاصل ہوتا ہے

ل$^3$ + م$^3$ = ۲ $\sum$ عہ$^3$ − ۳ $\sum$ عہ$^2$ بہ + ۱۲ عہ بہ جہ = − ۲۷ $\frac{گ}{ا^3}$

(دیکھو مثال ۵ صفحہ ۶۰ اور مثال ۱۵ صفحہ ۹۶ ) -

نیز

$$(\text{طہ}\,\text{ل})(\text{طہ}^2\,\text{م}) = \text{ل}\,\text{م} = \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 + \text{جہ}^2 - \text{بہ}\,\text{جہ} - \text{جہ}\,\text{عہ} - \text{عہ}\,\text{بہ}$$

$$= -9\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2}$$

اس لئے دو درجی مساوات

$$\text{ت}^2 + 27\,\frac{\text{گ}}{\text{ا}^3}\,\text{ت} - 27\,\frac{\text{ھ}^3}{\text{ا}^6} = 0$$

کی اصلیں ہیں

$$(\text{عہ} + \text{سہ}\,\text{بہ} + \text{سہ}^2\,\text{جہ})^3 ,\ (\text{عہ} + \text{سہ}^2\,\text{بہ} + \text{سہ}\,\text{جہ})^3$$

اس مساوات کی اصلوں کو یعنی

$$\frac{27}{2\,\text{ا}^3}\left(-\text{گ} \pm \sqrt{\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3}\right)$$

کو $\text{ت}_1$ اور $\text{ت}_2$ سے تعبیر کیا جائے تو ابتدائی ضابطہ ہے جو کعبی کے سروں کی (124)
رقوم میں بیان ہو چکا ہے ہمیں تین اصلیں حاصل ہونگی

$$\text{عہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\text{ت}_1} + \sqrt[3]{\text{ت}_2}\right),$$

$$\text{بہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{1}{3}\left(\text{سہ}\sqrt[3]{\text{ت}_1} + \text{سہ}^2\sqrt[3]{\text{ت}_2}\right),$$

$$\text{جہ} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \frac{1}{3}\left(\text{سہ}^2\sqrt[3]{\text{ت}_1} + \text{سہ}\sqrt[3]{\text{ت}_2}\right)$$

یہاں یہ بات دیکھ لی جا سکتی ہے کہ عہ، بہ، جہ کی جن قیمتوں پر ہم پہنچے ہیں وہ اسی شکل کی ہیں جو دفعہ ۶۵ میں حاصل ہوئی تھیں -

تفاعلوں

$$(\text{عہ} + \text{سہ}\,\text{بہ} + \text{سہ}^2\,\text{جہ})^3 ,\ (\text{عہ} + \text{سہ}^2\,\text{بہ} + \text{سہ}\,\text{جہ})^3$$

کی اس خاصیت کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ وہ تین مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو باہم کسی طرح ایک دوسرے کی جگہ بدل دیا جائے ۔ انہی خاصیت کی بنا پر کعبی مساوات کا حل دو درجی مساوات کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے ۔ عہ، بہ، جہ کے متعدد تفاعل ایسے ہیں جنہیں یہ خاصیت پائی جاتی ہے اور آئندہ چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ کسی دو ایسے تفاعلوں میں ایک منطق خطی ربط موجود ہوتا ہے جو سروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔

کعبی کو جبری طریقہ پر حل کرنے کے متعدد طریقوں پر مکمل بحث کرنیکے بعد ہم ایسی مثالیں درج کرتے ہیں جنمیں دفعات ماسبق کے اصول استعمال میں آتے ہیں ۔

## مثالیں

۱ــــ جملہ

(بہ - جہ)^۲ (لا - عہ)^۲ + (جہ - عہ)^۲ (لا - بہ)^۲ + (عہ - بہ)^۲ (لا - جہ)^۲

کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

فرض کرو　ع = (بہ - جہ)(لا - عہ)، و = (جہ - عہ)(لا - بہ)،

ھ = (عہ - بہ)(لا - جہ)

جواب :ــ ۲/۳ (ع + سہ و + سہ^۲ ھ)(ع + سہ^۲ و + سہ ھ)

۲ــــ ثابت کرو کہ نظام

(بہ - جہ)^۳ (لا - عہ)^۳ = (جہ - عہ)^۳ (لا - بہ)^۳ = (عہ - بہ)^۳ (لا - جہ)^۳

کی مساواتوں میں دو اجزائے ضربی مشترک ہیں ۔

(115) مثال ماسبق کی ترقیم کو اختیار کرنے سے

ع^۳ = و^۳ = ھ^۳

جس سے　ع^۳ - و^۳ = (ع - و)(ع^۲ + ع و + و^۲) ≡ ۱/۲ (ع - و)(ع^۲ + و^۲ + ھ^۲)

کیونکہ　ع + و + ھ = ۰

اسلئے $(به - جه)^2(لا - عه)^2 + (جه - عه)^2(لا - به)^2 + (عه - به)^2(لا - جه)^2$

مطلوبہ مشترک جزو ضربی ہے جو دوسرے درجہ کا ہے۔

**۳**۔ حسب ذیل جملوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

(۱) $(به - جه)^3(لا - عه)^3 + (جه - عه)^3(لا - به)^3 + (عه - به)^3(لا - جه)^3$،

(۲) $(به - جه)^5(لا - عه)^5 + (جه - عه)^5(لا - به)^5 + (عه - به)^5(لا - جه)^5$،

(۳) $(به - جه)^7(لا - عه)^7 + (جه - عه)^7(لا - به)^7 + (عه - به)^7(لا - جه)^7$

اِنکے اجزائے ضربی مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں حاصل شدہ نتیجوں کی مدد سے فوراً لکھے جا سکتے ہیں۔ مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے اور مثال ۴۰ صفحہ ۸۲ میں $عه_1$، $به_1$، $جه_1$ کی بجائے ع، و، ھ درج کرنے سے حسب ذیل اجزائے ضربی حاصل ہونگے:۔

**جواب**:۔ (۱) ۳ ع و ھ، (۲) $\frac{5}{2}(ع^2 + و^2 + ھ^2)$ ع و ھ،

(۳) $\frac{7}{4}(ع^2 + و^2 + ھ^2)^2$ ع و ھ

**۴**۔ $(لا - عه)(لا - به)(لا - جه)$

کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرو۔

فرض کرو

$$(لا - عه)(لا - به)(لا - جه) = ع_1^3 - و_1^3$$

جس سے

$$ع_1 - و_1 = له(لا - عه)،$$

$$سه ع_1 - سه^2 و_1 = مه(لا - به)،$$

$$سه^2 ع_1 - سه و_1 = نه(لا - جه)$$

جمع کرنے سے

$$له + مه + نه = ۰، \quad له عه + مه به + نه جه = ۰$$

اور اسلئے

$$له = ک(به - جه)، \quad مه = ک(جه - عه)، \quad نه = ک(عه - به)$$

لیکن $له\ مه\ نه = ۱$، اس لئے

۱ / ۲ ر = (بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ)،

ل، مہ، نہ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے اور مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے

ع_۱ - و_۱ = ر ع، سہ ع_۱ - سہ^۲ و_۱ = ر و

سہ^۲ ع_۱ - سہ و_۱ = ر ھ،

اس لئے

۳ ع_۱ = ر (ع + سہ^۲ و + سہ ھ)

- ۳ و_۱ = ر (ع + سہ و + سہ^۲ ھ)

اور ع_۱ اور و_۱ پوری طرح معلوم ہو سکتے ہیں۔

۵ — ثابت کرو کہ ل اور مہ اصلوں کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

ف کی تمام قیمتوں کے لئے

ل = عہ + سہ بہ + سہ^۲ جہ = عہ - ف + سہ (بہ - ف) + سہ^۲ (جہ - ف)

کیونکہ ۱ + سہ + سہ^۲ = ۰ ۔ اب ف کو متواتر عہ، بہ، جہ قیمتیں دینے سے ل کے لئے فرقوں بہ - جہ، جہ - عہ، عہ - بہ کی رقوم میں تین شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔ اسی طرح مہ کے لئے۔

۶ — اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔ (116)

ہم جانتے ہیں کہ

ل + مہ = ۲ عہ - بہ - جہ، ل + سہ^۲ مہ = (۲ بہ - جہ - عہ) سہ،

ل + سہ مہ = (۲ جہ - عہ - بہ) سہ^۲

اور نیز

ل - مہ = (بہ - جہ) (سہ - سہ^۲)، سہ^۲ ل - سہ مہ = (جہ - عہ) (سہ - سہ^۲)،

سہ ل - سہ^۲ مہ = (عہ - بہ) (سہ - سہ^۲)

ان سے ہمیں دفعہ ۲۶ کی طرح حاصل ہوگا

ل^۳ + مہ^۳ = (۲ عہ - بہ - جہ) (۲ بہ - جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بہ)

اور $$\text{ل}^{3} - \text{م}^{3} = -3\sqrt{-3}\,(\text{بہ} - \text{جہ})(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{عہ} - \text{بہ})،$$

اور چونکہ

$$(\text{ل}^{3} - \text{م}^{3})^{2} \equiv (\text{ل}^{3} + \text{م}^{3})^{2} - 4\,\text{ل}^{3}\,\text{م}^{3}$$

اس لئے $\text{ل}^{3} + \text{م}^{3}$ کی اور ل م کی قیمتوں کو درج کرنے سے جو دفعہ ٥٩ میں حاصل کیجا چکی ہیں حاصل ہوگا

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^{2}(\text{جہ} - \text{عہ})^{2}(\text{عہ} - \text{بہ})^{2} = -27\,(\text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3})$$

(دیکھو دفعہ ٤٢)

٧ — تماثلات ذیل ثابت کرو:-

$$\text{ل}^{3} + \text{م}^{3} \equiv \tfrac{1}{2}\{(2\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ})^{3} + (2\text{بہ} - \text{جہ} - \text{عہ})^{3} + (2\text{جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^{3}\}،$$

$$\text{ل}^{3} - \text{م}^{3} \equiv \sqrt{-3}\,\{(\text{بہ} - \text{جہ})^{3} + (\text{جہ} - \text{عہ})^{3} + (\text{عہ} - \text{بہ})^{3}\}$$

ل + م وغیرہ، ل - م وغیرہ

کی قیمتوں کو جو مثال ماسبق میں دی گئی ہیں تیسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے ہم بہ آسانی مذکورہ بالا تماثلات حاصل کر سکتے ہیں۔

٨ — عہ، بہ، جہ کے فرقوں کی رقوم میں $\text{ل}^{2}$، $\text{م}^{2}$، وغیرہ کے لئے جملے معلوم کرو۔

$(\text{عہ} + \text{سہ}\,\text{بہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{جہ})^{2}$ اور $(\text{عہ} + \text{سہ}^{2}\,\text{بہ} + \text{سہ}\,\text{جہ})^{2}$ میں سے

$$(\text{عہ}^{2} + \text{بہ}^{2} + \text{جہ}^{2})(1 + \text{سہ} + \text{سہ}^{2}) \equiv 0$$

کو تفریق کرنے سے $\text{ل}^{2}$ اور $\text{م}^{2}$ کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:-

$$-\text{ل}^{2} = (\text{بہ} - \text{جہ})^{2} + \text{سہ}^{2}(\text{جہ} - \text{عہ})^{2} + \text{سہ}(\text{عہ} - \text{بہ})^{2}،$$

$$-\text{م}^{2} = (\text{بہ} - \text{جہ})^{2} + \text{سہ}(\text{جہ} - \text{عہ})^{2} + \text{سہ}^{2}(\text{عہ} - \text{بہ})^{2}$$

اسی طرح اِن جملوں سے ہم حاصل کرینگے

− ل$^{۳}$ = (ب − ج)$^{۲}$(۲ع − ب − ج)$^{۲}$ + س(ج − ع)$^{۲}$(۲ب − ج − ع)$^{۲}$
+ س$^{۲}$(ع − ب)$^{۲}$(۲ج − ع − ب)$^{۲}$،

− م$^{۳}$ = (ب − ج)$^{۲}$(۲ع − ب − ج)$^{۲}$ + س$^{۲}$(ج − ع)$^{۲}$(۲ب − ج − ع)$^{۲}$
+ س(ع − ب)$^{۲}$(۲ج − ع − ب)$^{۲}$،

نیز بغیر کسی دقت کے ل م اور ل$^{۳}$ م$^{۳}$ کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہونگے:۔

۲ل م = (ب − ج)$^{۲}$ + (ج − ع)$^{۲}$ + (ع − ب)$^{۲}$

ل$^{۲}$ م$^{۲}$ = (ع − ب)$^{۲}$(ع − ج)$^{۲}$ + (ب − ج)$^{۲}$(ب − ع)$^{۲}$
+ (ج − ع)$^{۲}$(ج − ب)$^{۲}$

۹ــ ل یا م کے نمونہ کے چھ تفاعل حسب ذیل ہیں۔

ع + س ب + س$^{۲}$ ج، س ع + س$^{۲}$ ب + ج، س$^{۲}$ ع + ب + س ج،
ع + س$^{۲}$ ب + س ج، س ع + ب + س$^{۲}$ ج، س$^{۲}$ ع + س ب + ج،

وہ مساوات بناؤ جنکی اصلیں یہ چھ مقداریں ہوں ۔

(117) اِن تفاعلوں کو حسب طریقہ ذیل بیان کیا جا سکتا ہے :۔

ل، س ل، س$^{۲}$ ل

م، س م، س$^{۲}$ م

پس مساوات

(ف − ل)(ف − س ل)(ف − س$^{۲}$ ل)(ف − م)(ف − س م)
(ف − س$^{۲}$ م) = ۰

یا ف$^{۶}$ − (ل$^{۳}$ + م$^{۳}$) ف$^{۳}$ + ل$^{۳}$ م$^{۳}$ = ۰

کی اصلیں مندرجۂ بالا مقداریں ہیں ۔

مساواتوں

ل م = − $\dfrac{۹ ھ}{ا^{۲}}$ ، ل$^{۳}$ + م$^{۳}$ = − ۲۷ $\dfrac{گ}{ا^{۳}}$

سے ل اور م کی بجائے انکی قیمتیں درج کرنے سے ہم اوپر کی مساوات کو سروں کی

رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$\text{فہ}^{۲} + ۳^{۳}\,\frac{\text{گ}}{\text{ا}^{۲}}\,\text{فہ}^{۳} - ۳^{۶}\,\frac{\text{ھ}^{۳}}{\text{ا}^{۶}} = ۰$$

۱۰ — ل اور م کی رقوم میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عام کعبی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں -

فرض کرو کہ $\text{فہ} = (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}$

پس قبل الذکر نتیجوں سے

$$\sqrt{-۳\,\text{فہ}} = \text{سہ}\,\text{ل} - \text{سہ}^{۲}\,\text{م}$$

اس کو منطق بناؤ تو

$$\text{فہ}\,(\text{فہ} - \text{ل}\,\text{م})^{۲} + \frac{(\text{ل}^{۳} - \text{م}^{۳})^{۲}}{۲۷} = ۰$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے -

اسی طرح مثال ۸ کے نتیجوں کی مدد سے اس مساوات کی مربع دار فرقونکی مساوات یا وہ مساوات جسکی اصلیں ہوں

$$(\text{بہ} - \text{جہ})^{۲}(۲\,\text{عہ} - \text{بہ} - \text{جہ})^{۲},\ (\text{جہ} - \text{عہ})^{۲}(۲\,\text{بہ} - \text{جہ} - \text{عہ})^{۲},\ (\text{عہ} - \text{بہ})^{۲}(۲\,\text{جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^{۲}$$

حاصل ہوتی ہے اگر ہم آخری مساوات میں م اور ل کی بجائے علی الترتیب - ل^۲ اور - م^۲ درج کریں اور اس عمل کو جتنی مرتبہ ہم چاہیں دُہرا سکتے ہیں -

بالآخر یہ سب مساواتیں کعبی کے سروں کی رقوم میں روابط

$$\text{ل}\,\text{م} = -۹\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}^{۲}}\ \text{اور}\ \text{ل}^{۳} + \text{م}^{۳} = -۲۷\,\frac{\text{گ}}{\text{ا}^{۳}}$$

کی مدد سے بہ آسانی بیان ہو سکتی ہیں - تمثیلاً پہلی مساوات ہوگی

$$\text{فہ}\,\left(\text{فہ} + ۹\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}^{۲}}\right)^{۲} + ۲۷\,\frac{\text{گ}^{۲} + ۴\,\text{ھ}^{۳}}{\text{ا}^{۴}} = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۴۲) (118)

۱۱ — اگر کعبی مساواتوں

ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰ ،

اَ لا^۳ + ۳ بَ لا^۲ + ۳ جَ لا + دَ = ۰

کی اصلیں عہ، بہ، جہ اور عہَ، بہَ، جہَ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں تفاعل

فہ ≡ عہ عہَ + بہ بہَ + جہ جہَ

کی چھ قیمتیں ہوں ۔

عمل کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے اِن کعبیوں کے لئے وہ مساواتیں بنائی جائیں جنہیں دوسری رقمیں موجود نہ ہوں یعنے

ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰ ، یَ^۳ + ۳ ھَ یَ + گَ = ۰

اور پھر مطلوبہ مساوات عام صورت میں اِن سے اخذ کیجائے کیونکہ اس طور پر استحالہ شدہ کعبیوں کی صورت میں اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کے جواب میں تفاعل

فہ ≡ (ا عہ + ب)(اَ عہَ + بَ) + (ا بہ + ب)(اَ بہَ + بَ)

+ (ا جہ + ب)(اَ جہَ + بَ) ≡ ا اَ فہ − ۳ ب بَ

حاصل ہوگا ۔

استحالہ شدہ مساواتوں کی اصلوں کی بجائے اِن کی قیمتیں جنکو جذروں سے بیان کیا گیا ہے درج کرنے سے

فہ = (∛ف + ∛ق)(∛فَ + ∛قَ) + (سہ ∛ف + سہ^۲ ∛ق)(سہ ∛فَ

+ سہ^۲ ∛قَ) + (سہ^۲ ∛ف + سہ ∛ق)(سہ^۲ ∛فَ + سہ ∛قَ)

جو شکل

فہ = ۳ (∛(ف قَ) + ∛(فَ ق))

میں تحویل ہوتا ہے ۔

اِسکا کعب لینے سے حاصل ہوتا ہے

فہ^۳ − ۲۷ ∛(ف ق فَ قَ) فہ − ۲۷ (ف قَ + فَ ق) = ۰

اب ف ، ق اور فَ ، قَ کی بجائے اِن کی قیمتیں جو مساواتوں

$$\text{لا}^{2} + \text{گ لا} - \text{ھ}^{3} = 0 \text{ ، } \text{لا}^{2} + \text{گَ لا} - \text{ھَ}^{3} = 0$$

سے حاصل ہوتی ہیں درج کی جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں دو کعبی مساواتوں

$$\text{فہ}^{3} - 27\,\text{ھ ھَ فہ} - \frac{27}{2}\left(\text{گ گَ} \pm \text{ا اَ}\sqrt{\Delta\,\Delta'}\right) = 0$$

سے ملجائیں گی جہاں

$$\text{ا}^{2}\Delta = \text{گ}^{2} + 4\,\text{ھ}^{3} \text{ ، اور } \text{اَ}^{2}\Delta' = \text{گَ}^{2} + 4\,\text{ھَ}^{3}$$

آخرالامر فہ کی بجائے اس کی قیمت ا اَ فہ − ۳ ب بَ درج کرنے سے اوران دو کعبیوں کو باہم ضرب دینے سے ہمیں مطلوبہ مساوات ملے گی۔ یہ یاد رہے کہ اگر ایک کعبی $\text{لا}^{3} - 1 = 0$ ہو تو $\text{فہ} = \text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ}^{2}\text{ جہ}$ وغیرہ اس صورت پر مثال ۹ میں غور کیا جا چکا ہے۔

۱۲ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ر کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں (119)

$$\text{ر} = \frac{\text{عہ} - \text{بہ}}{\text{عہ} - \text{جہ}}$$

اور عہ ، بہ ، جہ مساوات $\text{ا لا}^{3} + 3\,\text{ب لا}^{2} + 3\,\text{ج لا} + \text{د} = 0$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ ر میں عہ ، بہ ، جہ کے صرف فرق اوران کی نسبتیں شامل ہیں اسلئے نتیجہ وہی حاصل ہوگا اگر ہم عہ ، بہ ، جہ کی جگہ مساوات $\text{ی}^{3} + 3\,\text{ھ ی} + \text{گ} = 0$ کی اصلیں $\text{ی}_1$ ، $\text{ی}_2$ ، $\text{ی}_3$ رکھیں۔

اس لئے

$$(2\text{ر} - 1)\,\text{ی}_1 = -(\text{ر} + 1)\,\text{ی}_2 \text{ ،}$$

$$\text{گ} = \text{ی}_1\text{ی}_2(\text{ی}_1 + \text{ی}_2) = \frac{(2\text{ر} - 1)(\text{ر} - 2)}{(\text{ر} + 1)^{2}}\,\text{ی}_1^{3}$$

اور اسی طرح

$$\text{ھ} = -\frac{(\text{ر}^{2} - \text{ر} + 1)}{(\text{ر} + 1)^{2}}\,\text{ی}_1^{2}$$

اِن سے ی٫ کو ساقط کر دیا جائے تو مطلوبہ مساوات ملیگی

ھ^۳ {(ر + ۱)(ر − ۲)(۲ر − ۱)}^۲ + گ^۲ (ر^۲ − ر + ۱)^۳ = ۰

۱۳ — کعبیوں

ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰

اَ لا^۳ + ۳ بَ لا^۲ + ۳ جَ لا + دَ = ۰

کے سروں کے درمیان رابطہ معلوم کرو جبکہ اصلوں میں ربط

عہ (بہَ − جہَ) + بہ (جہَ − عہَ) + جہ (عہَ − بہَ) = ۰

موجود ہو۔

سہ − سہَ^۲ سے ضرب دو تو یہ مساوات ہو جائیگی

ل مَ = لَ م

مکعب لیکر سروں کو داخل کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوگی

گ^۲ ھَ^۳ = گَ^۲ ھ^۳

۱۴ — سروں اور اصلوں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ مثال ۱۳ کی کعبی مساواتیں خطی استحالہ

لاَ = پ لا + ق

سے مماثل ہو جائیں۔

اس صورت میں

عہَ = پ عہ + ق، بہَ = پ بہ + ق، جہَ = پ جہ + ق

پ اور ق کو ساقط کرنے سے

بہ جہَ − بہَ جہ + جہ عہَ − جہَ عہ + عہ بہَ − عہَ بہ = ۰

جو اصلوں کا ایسا تفاعل ہے جس پر مثال ماسبق میں غور کیا جا چکا ہے۔ مزید براں یہ ربط غیر متغیر رہتا ہے اگر عہ، بہ، جہ، اور عہَ، بہَ، جہَ، کی بجائے

ل عہ + م، ل بہ + م، ل جہ + م،

لَ عہَ + مَ، لَ بہَ + مَ، لَ جہَ + مَ،

درج کئے جائیں ۔ اس لئے ہم مثال ماسبق کی کعبی مساواتوں کو سادہ شکلوں (۱)۲۲

$$ی^{۳} + ۳ ھ ی + گ = ۰ ، \quad ی^{۳} + ۳ ھَ ی + گَ = ۰$$

میں غور کر سکتے ہیں جو خطی استحالوں ی = ا لا + ب ، ی = اَ لاَ + بَ سے حاصل ہوتے ہیں ۔ کیونکہ اگر شرط قبل الذکر مساواتوں پر صادق آتی ہے تو بعد الذکر مساواتوں پر بھی صادق آنی چاہیئے ۔

اب رکھو یَ = ک ی تو یہ مساواتیں مماثل ہو جائیں گی اگر

$$ھَ = ک^{۲} ھ ، \quad گَ = ک^{۳} گ$$

ان سے ک کو ساقط کیا جائے تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$گ^{۲} ھَ^{۳} = گَ^{۲} ھ^{۳}$$

یہ شرط وہی ہے جو مثال ۱۳ میں حاصل ہوئی تھی ۔ یہ یاد رہے کہ کعبیوں کو تحویل کرنے والے دو درجی اسی استحالہ یعنے

$$\frac{ھَ}{گَ}(اَ لاَ + بَ) = \frac{ھ}{گ}(ا لا + ب)$$

سے مماثل ہوسکتے ہیں ۔

**۶۰ ۔ کعبی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط ۔** چار درجی کی بحث شروع کرنے سے پیشتر ہم کعبی کے لئے حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں :۔

**کعبی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے درمیان سروں کی رقوم میں ایک ہم رسم ربط ہوتا ہے ۔**

دفعہ ۲۷ کی ۱۳ ویں اور ۱۴ ویں مثالوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$ا_{۰}^{۲}\{(بہ - جہ)^{۲} + (جہ - عہ)^{۲} + (عہ - بہ)^{۲}\} = ۱۸(ا_{۱}^{۲} - ا_{۰} ا_{۲}) ،$$

$$ا_{۰}^{۲}\{عہ(بہ - جہ)^{۲} + بہ(جہ - عہ)^{۲} + جہ(عہ - بہ)^{۲}\} = ۹(ا_{۰} ا_{۳} - ا_{۱} ا_{۲}) ،$$

$$ا_{۰}^{۲}\{عہ^{۲}(بہ - جہ)^{۲} + بہ^{۲}(جہ - عہ)^{۲} + جہ^{۲}(عہ - بہ)^{۲}\} = ۱۸(ا_{۲}^{۲} - ا_{۱} ا_{۳}) ،$$

ترقیم

$$ا ا_{۲} - ا_{۱}^{۲} \equiv ھ ، \quad ا ا_{۳} - ا_{۱} ا_{۲} \equiv ۲ ھ_{۱} ، \quad ا_{۱} ا_{۳} - ا_{۲}^{۲} \equiv ھ_{۲}$$

کو استعمال کرنے، اوپر کی مساواتوں کو علی الترتیب عہ بہ، $-$ (عہ + بہ)، ا سے ضرب دینے، حاصل ضربوں کو جمع کرنے اور اس کا لحاظ رکھنے سے کہ

$$عہ^{۲} - عہ (عہ + بہ) + عہ بہ \equiv ۰ ، \quad بہ^{۲} - بہ (عہ + بہ) + عہ بہ \equiv ۰ .$$

ہمیں حاصل ہوگا

$$ا^{۲} (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)^{۲} = ۱۸ \{ ھ عہ بہ + ھ_{۱} (عہ + بہ) + ھ_{۲} \}$$

لیکن

$$ا^{۴} (بہ - جہ)^{۲} (جہ - عہ)^{۲} (عہ - بہ)^{۲} = - ۲۷ \Delta \equiv ۱۰۸ (ھ ھ_{۲} - ھ_{۱}^{۲})$$

(دیکھو دفعہ ۴۲)۔ اس لئے

$$\pm \sqrt{- \frac{\Delta}{۳}} \left( \frac{عہ - بہ}{۲} \right) = ھ عہ بہ + ھ_{۱} (عہ + بہ) + ھ_{۲}$$

اور اس لئے

$$ھ عہ بہ + \left( ھ_{۱} + \frac{۱}{۲} \sqrt{- \frac{\Delta}{۳}} \right) عہ + \left( ھ_{۱} - \frac{۱}{۲} \sqrt{- \frac{\Delta}{۳}} \right) بہ + ھ_{۲} = ۰ . \quad \text{(121)}$$

جو مطلوبہ ہم رسم ربط ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس مساوات کے سروں میں ایک غیر منطق مقدار شامل ہے جس کی دوسری علامت سے اصلوں کے ایک مختلف زوج کے درمیان ہم رسم ربط حاصل ہوگا۔

## ۶۱ — چار درجی کا پہلا حل جذروں کے ذریعہ ۔ یولر کا مفروضہ۔

فرض کرو کہ چار درجی مساوات

$$ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ۶ ج لا^{۲} + ۴ د لا + س = ۰ .$$

کو شکل (دفعہ ۳۷)

$$ی^{۴} + ۶ ھ ی^{۲} + ۴ گ ی + ا^{۲} ع - ۳ ھ^{۲} = ۰ .$$

میں لکھا گیا ہے جہاں

$$ی \equiv ا لا + ب ، \quad ھ \equiv ا ج - ب^2 ،$$

$$ع \equiv ا س - 4 ب د + 3 ج^2 ،$$

$$گ \equiv ا^2 د - 3 ا ب ج + 2 ب^3$$

اس مساوات کو حل کرنیکے لئے (جسمیں دوسری رقم موجود نہیں ہے) یولر ایک اصل کے لئے حسب ذیل عام جملہ مان لیتا ہے:-

$$ی = \sqrt{ف} + \sqrt{ق} + \sqrt{ر}$$

مربع لینے سے

$$ی^2 - ف - ق - ر = 2(\sqrt{ق}\sqrt{ر} + \sqrt{ر}\sqrt{ف} + \sqrt{ف}\sqrt{ق})$$

پھر مربع لینے اور تحویل کرنے سے ہمیں مساوات حاصل ہوگی

$$ی^4 - 2(ف + ق + ر) ی^2 - 8 ی \sqrt{ف}\sqrt{ق}\sqrt{ر}$$
$$+ (ف + ق + ر)^2 - 4(ق ر + ر ف + ف ق) = 0$$

اس مساوات کا مقابلہ قبل الذکر مساوات سے کیا جائے تو

$$ف + ق + ر = -3 ھ ، \quad ق ر + ر ف + ف ق = 3 ھ^2 - \frac{ا^2 ع}{4} ،$$

$$\sqrt{ف}\sqrt{ق}\sqrt{ر} = -\frac{گ}{2}$$

اور اس لئے ف، ق، ر، مساوات

$$ت^3 + 3 ھ ت^2 + (3 ھ^2 - \frac{ا^2 ع}{4}) ت - \frac{گ^2}{4} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

کی اصلیں ہیں۔ یا چونکہ

$$- گ^2 \equiv 4 ھ^3 - ا^2 ھ ع + ا^3 جے ، \quad \text{(دفعہ ۳۷)}$$

جہاں $جے \equiv ا ج س + 2 ب ج د - ا د^2 - س ب^2 - ج^3$

(122) اسلئے یہ مساوات شکل

$$\text{۴}(\text{ت}+\text{ھ})^{\text{۳}}-\text{ا}^{\text{۲}}\text{ع}(\text{ت}+\text{ھ})+\text{ا}^{\text{۳}}\text{جے}=\text{۰}$$

میں لکھی جا سکتی ہے اور $\text{ت}+\text{ھ}\equiv\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}$ رکھنے سے بالآخر ہمیں مساوات

$$\text{۴}\,\text{ا}^{\text{۳}}\text{ط}^{\text{۳}}-\text{ع}\,\text{ا}\,\text{ط}+\text{جے}=\text{۰}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس کو ہم چار درجی مساوات کا **محول کعبی** کہینگے اور آیندہ اس کو اسی نام سے موسوم کرینگے۔ جب مساواتوں (۱) اور (۲) میں تمیز پیدا کرنا ضروری ہو جائے تو ہم قبل الذکر مساوات کو یولر کا کعبی کہیں گے نیز چونکہ $\text{ت}\equiv\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}$ اس لئے اگر کعبی کی اصلیں $\text{ط}_{\text{۱}}$، $\text{ط}_{\text{۲}}$، $\text{ط}_{\text{۳}}$ ہوں تو

$$\text{ف}\equiv\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۱}}،\quad \text{ق}\equiv\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۲}}،$$

$$\text{ر}\equiv\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۳}}$$

اور اسلئے

$$\text{ی}=\pm\sqrt{\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۱}}}\pm\sqrt{\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۲}}}\pm\sqrt{\text{ب}^{\text{۲}}-\text{اج}+\text{ا}^{\text{۲}}\text{ط}_{\text{۳}}}$$

اگر اس ضابطہ کو ی میں چار درجی مساوات کی ایک اصل قرار دیا جائے تو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ شامل ہونے والے جذر عام سے عام شکل میں نہیں ہیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ی کی چار قیمتوں کی بجائے آٹھ قیمتیں ضابطہ سے حاصل ہوتیں۔ ٹھیک ٹھیک قید ربط

$$\pm\sqrt{\text{ف}}\,\pm\sqrt{\text{ق}}\,\pm\sqrt{\text{ر}}=-\frac{\text{گ}}{\text{۲}}$$

سے عاید ہوتی ہے (جس کو مربع لینے میں نظر انداز کر دیا گیا ہے) جس کی بموجب مقداروں $\pm\sqrt{\text{ف}}$، $\pm\sqrt{\text{ق}}$، $\pm\sqrt{\text{ر}}$ میں سے ہر ایک کو ایسی

علامتیں لگانی ہونگی کہ اِن کا حاصل ضرب وہی علامت برقرار رکھ سکے جو اوپر کی مساوات سے مُتعین ہوتی ہے ۔ اس طرح

$$\sqrt{ف}\,\sqrt{ق}\,\sqrt{ر} = \sqrt{ف}\,(-\sqrt{ق}\,)(-\sqrt{ر}\,)$$

$$= (-\sqrt{ف}\,)\,\sqrt{ق}\,(-\sqrt{ر}\,) = (-\sqrt{ف}\,)(-\sqrt{ق}\,)\,\sqrt{ر}$$

مقداروں $\sqrt{ف}$ ، $\sqrt{ق}$ ، $\sqrt{ر}$ کے وہ سب ممکن اجتماع ہیں جو

اس شرط کو پورا کرتے ہیں بشرطیکہ $\sqrt{ف}$ ، $\sqrt{ق}$ ، $\sqrt{ر}$ پورے عمل میں وہی علامتیں برقرار رکھیں خواہ یہ علامتیں کچھ بھی ہوں ۔ بہرکیف علامت سے متعلق تمام شکوک کو ہم رفع کر سکتے ہیں اور ی کی چار قیمتوں کو ایک
(123) واحد جبری ضابطہ سے بیان کر سکتے ہیں اور یہ اس طرح کہ ی کی مفروضہ قیمت سے متذکرہ بالا ربط کے ذریعہ مقداروں $\sqrt{ف}$ ، $\sqrt{ق}$ ، $\sqrt{ر}$ میں سے کسی ایک کو ساقط کر دیا جائے اور باقی دو مقداروں پر علامت کی کوئی قید نہ لگائی جائے ۔ اس لئے ی کے لئے جو جملہ ہے وہ ہو جاتا ہے

$$ی = \sqrt{ف} + \sqrt{ق} - \frac{گ}{۲\sqrt{ف}\,\sqrt{ق}}$$

یہ ضابطہ ایسا ہے جو ہر قسم کے ابہام سے پاک ہے کیونکہ اس سے ی کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ $\sqrt{ف}$ اور $\sqrt{ق}$ کو دوہری علامتیں لگا دی جائیں ۔ ظاہر ہے کہ پہلی دو مقداروں کو جو علامتیں دیجائینگی اُن کے لحاظ سے تیسری رقم کے کسب نما کی علامت متعین ہو جائیگی ۔ بالآخر ف ، ق اور ی کو اُن کی وہ قیمتیں دینے سے جو اوپر حاصل کی گئی ہیں ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{۲ لا} + \text{ب} = \sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\text{طہ}_1} + \sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\text{طہ}_2} - \frac{\text{گ}}{2\sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\text{طہ}_1}\sqrt{\text{ب}^2 - \text{اج} + \text{ا}^2\text{طہ}_2}}$$

جو چار درجی مساوات کا مکمل جبری حل ہے جس میں $\text{طہ}_1$ اور $\text{طہ}_2$ مساوات

$$4\,\text{ا}^3\text{طہ}^3 - \text{ع}\,\text{ا}\,\text{طہ} + \text{ج} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

چار درجی کے حل کی شکل کے متعلق یولر کا مذکورۂ بالا بظاہر اختیاری مفروضہ جائز و درست ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ ی میں جو مساوات ہے اس کی دوسری رقم موجود نہ ہونیکی وجہ سے اس کی چار اصلوں کا مجموعہ صفر ہے یعنی $\text{ی}_1 + \text{ی}_2 + \text{ی}_3 + \text{ی}_4 = 0$ اور اسلئے تفاعل $(\text{ی}_1 + \text{ی}_2)^2$ وغیرہ جو عام طور پر تعداد میں چھ ہونگے (چار مقداروں میں سے دو دو کے اجتماع) اس صورت میں صرف تین ہیں۔ اس طرح ہم مان سکتے ہیں

$$(\text{ی}_1 + \text{ی}_2)^2 = (\text{ی}_3 + \text{ی}_4)^2 = 4\,\text{ف}،$$

$$(\text{ی}_1 + \text{ی}_3)^2 = (\text{ی}_2 + \text{ی}_4)^2 = 4\,\text{ق}،$$

$$(\text{ی}_1 + \text{ی}_4)^2 = (\text{ی}_2 + \text{ی}_3)^2 = 4\,\text{ر}،$$

جس سے $\text{ی}_1$، $\text{ی}_2$، $\text{ی}_3$، $\text{ی}_4$ ضابطہ

$$\sqrt{\text{ف}} + \sqrt{\text{ق}} + \sqrt{\text{ر}}$$

میں شامل ہو جاتے ہیں۔

اب ہم یولر کے کعبی (۱) کی اصلوں اور نیز محول کعبی (۲) کی اصلوں کو

لا میں دئے ہوئے چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کرینگے۔ جذروں کی علامتوں کے متعلق جو باتیں اوپر بیان کی گئی ہیں اُن کو پیش نظر رکھکر ہم ی ≡ ا لا + ب کی چار قیمتیں لکھ سکتے ہیں جو حسب ذیل ہیں :-

ا عہ + ب = √ف − √ق − √ر ،

ا بہ + ب = −√ف + √ق − √ر ، (۳)

ا جہ + ب = −√ف − √ق + √ر ،

ا ضہ + ب = √ف + √ق + √ر

جن سے یولر کے کعبی کی اصلوں ف، ق، ر کے لئے حسب ذیل جملے فوراً اخذ کئے جا سکتے ہیں :-

ف = (ا$^2$ / ۱۶) (بہ + جہ − عہ − ضہ)$^2$ ،

ق = (ا$^2$ / ۱۶) (جہ + عہ − بہ − ضہ)$^2$ ، (۴)

ر = (ا$^2$ / ۱۶) (عہ + بہ − جہ − ضہ)$^2$

مساواتوں (۳) میں سے دو دو مساواتیں لیکر عمل تفریق سے اور ف، ق، ر اور طہ$_1$، طہ$_2$، طہ$_3$ کے درمیان مندرجۂ بالا ربطوں کو استعمال کرنے سے ہم بہ آسانی حسب ذیل کارآمد روابط حاصل کرتے ہیں جو کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے فرقوں کو چار درجی کی اصلوں کے فرقوں سے ملاتے ہیں :-

۴ (ق − ر) = ۴ ا$^2$ (طہ$_2$ − طہ$_3$) = − ا$^2$ (بہ − جہ) (عہ − ضہ) ،

۴ (ر − ف) = ۴ ا$^2$ (طہ$_3$ − طہ$_1$) = − ا$^2$ (جہ − عہ) (بہ − ضہ) ، (۵)

۴ (ف − ق) = ۴ ا$^2$ (طہ$_1$ − طہ$_2$) = − ا$^2$ (عہ − بہ) (جہ − ضہ)

بالآخر ان مساواتوں سے ربط طہ$_{1}$ + طہ$_{2}$ + طہ$_{3}$ = ۰ کے ذریعہ ہم طہ$_{1}$، طہ$_{2}$، طہ$_{3}$ کی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں اخذ کرتے ہیں:-

۱۲ طہ$_{1}$ = (جہ − عہ) (بہ − ضہ) − (عہ − بہ) (جہ − ضہ)،

۱۲ طہ$_{2}$ = (عہ − بہ) (جہ − ضہ) − (بہ − جہ) (عہ − ضہ)،

۱۲ طہ$_{3}$ = (بہ − جہ) (عہ − ضہ) − (جہ − عہ) (بہ − ضہ)

125)

## مثالیں

۱ — جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور بالعکس۔

۲ — جب چار درجی کی تین اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی سب اصلیں صفر ہونگی اور اس لئے ع = ۰، ج = ۰.

۳ — جب چار درجی مساوی اصلوں کے دو علٰحدہ جوڑے رکھتا ہو تو یولر کے کعبی کی اصلیں صفر ہوتی ہیں اور اسلئے

گ = ۰، ا$^{2}$ ع − ۱۲ ھ$^{2}$ = ۰.

۴ — اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے چار درجی اور یولر کے کعبی کے درمیان روابط ذیل ثابت کرو:-

(۱) جب چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔

(۲) جب چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی جنمیں سے دو منفی اور ایک مثبت ہوگی۔

(۳) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی دو اصلیں خیالی اور ایک اصل مثبت اور حقیقی ہوگی۔

یہ نتیجے مساواتوں (۴) سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں اگر ف، ق، ر کی قیمتوں میں عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے مناسب شکلیں درج کیجائیں۔ یہ یاد رہے کہ یہاں تمام ممکن صورتیں بیان کردی گئی ہیں اور چار درجی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے!

اس کی اصلیں مساوی نہیں ہیں۔ ان میں سے ہر مسئلہ کا عکس بھی درست ہے پس جب یولر کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہوں تو ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ اور جب یولر کے کعبی کی اصلیں منفی ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہیں اور جب یولر کے کعبی کی اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۵ ــ ثابت کرو کہ چار درجی کی اصلوں اور محول کعبی کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل مربط موجود ہوتے ہیں:۔

(۱) اگر چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی تو محول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو چار درجی کی اصلیں یا تو سب کی سب حقیقی ہونگی یا سب کی سب خیالی۔

(۲) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

یہ نتیجے مثال ماسبق سے فوراً اخذ ہو سکتے ہیں کیونکہ کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے درمیان ایک حقیقی خطی ربط موجود ہوتا ہے۔

۶ ــ جب، ھ مثبت ہو تو چار درجی خیالی اصلیں رکھیگا۔

کیونکہ ایسی صورت میں یولر کے کعبی کی سب اصلیں مثبت نہیں ہو سکتیں۔

۷ ــ جب، ع منفی ہو تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

کیونکہ ایسی صورت میں محول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی (مثال ۱۲ صفحہ ۱۸۲)

۸ ــ جب، ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہونگی۔ (126)

کیونکہ جے مثبت ہونے کی وجہ سے محول کعبی کی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی۔ اسلئے یولر کے کعبی کی بھی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی اس وجہ سے کہ ت = ا۲ ط ـ ھ اور ھ مثبت ہے۔ یہ مثال (۴) کی صورت (۲) ہے۔

اس ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ پہلا سر ا$_{0}$ مثبت ہے۔ اگر جے کی بجائے ا$_{0}$ جے مسئلہ بالا میں درج کیا جائے تو ا$_{0}$ پر کسی علامت کی قید لگانا ضروری نہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ دو چار درجی مساواتوں

ا$_{0}$ لا$^{4}$ + ۶ ا$_{2}$ لا$^{2}$ ± ۴ ا$_{3}$ لا + ا$_{4}$ = ۰

کا محول کعبی ایک ہی ہے۔

۱۰۔ دو چار درجی مساواتوں

لا$^{4}$ − ۶ ل لا$^{2}$ ± ۸ لا $\sqrt{\phantom{x}}$(ل$^{3}$ + م$^{3}$ + ن$^{3}$ − ۳ ل م ن) + ۳(۴ م ن − ل$^{2}$) = ۰

کا محول کعبی معلوم کرو۔

جواب:- ط$^{3}$ − ۳ م ن ط − (م$^{3}$ + ن$^{3}$) = ۰

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

{لا$^{4}$ − ۶ ل لا$^{2}$ + ۳(۴ م ن − ل$^{2}$)}$^{2}$ = ۶۴ (ل$^{3}$ + م$^{3}$ + ن$^{3}$ − ۳ ل م ن) لا$^{2}$

کی آٹھ اصلیں ضابطہ

$\sqrt{\phantom{x}}$(ل + م + ن) + $\sqrt{\phantom{x}}$(ل + سہ م + سہ$^{2}$ ن) + $\sqrt{\phantom{x}}$(ل + سہ$^{2}$ م + سہ ن)

سے حاصل ہوتی ہیں۔ (مثال ۲۰ صفحہ ۴۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

۱۲۔ اگر مساوات

ی$^{4}$ + ۶ ھ ی$^{2}$ + ۴ گ ی + ا$_{0}^{2}$ ع − ۳ ھ$^{2}$ = ۰

کی ایک اصل

$\sqrt{\phantom{x}}$(ل + م + ن) + $\sqrt{\phantom{x}}$(ل + سہ م + سہ$^{2}$ ن) + $\sqrt{\phantom{x}}$(ل$^{2}$ + سہ$^{2}$ م + سہ ن)

ہو تو ل، م، ن کی رقوم میں ھ، ع، جے معلوم کرو۔

جواب:- ھ = −ل، ا$_{0}^{2}$ ع = ۱۲ م ن، ا$_{0}^{3}$ جے = −۴(م$^{3}$ + ن$^{3}$)

۱۳ — وہ ضابطے لکھو جو چار درجی کی حل کو خاص صورتوں ع = ۰ اور جے = ۰ میں بیان کریں۔

۱۴ — اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں محول کعبی کی مدد سے ع اور جے کو بیان کرو۔ (دیکھو دفعہ ۲۷، مثالیں ۱۸، ۱۶)

۱۵ — اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو ع اور جے کی رقوم میں بیان کرو۔

مندرجۂ بالا مساواتوں (۵) اور مساوات (۲) صفحہ ۱۱۷ کی مدد سے ہم مطلوبہ حاصل ضرب حاصل کرتے ہیں۔

$$\text{ا}_{۰}^{۶}(\text{بہ}-\text{جہ})^{۲}(\text{جہ}-\text{عہ})^{۲}(\text{عہ}-\text{بہ})^{۲}(\text{عہ}-\text{ضہ})^{۲}(\text{بہ}-\text{ضہ})^{۲}(\text{جہ}-\text{ضہ})^{۲}$$

$$=۲۵۶\,(\text{ع}^{۳}-۲۷\,\text{جے}^{۲})$$

۱۶ — حل کو بیان کرنیوالے جملہ میں آخری جذر المربع کی علامت میں (یعنی اُس علامت جذر میں جو محول کعبی کے حل میں جذر الکعب میں واقع ہوتا ہے) کونسی مقدار آتی ہے؟

جواب:- $۲۷\,\text{جے}^{۲}-\text{ع}^{۳}$

۱۷ — ثابت کرو کہ چار درجی مساوات

$$\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{۴}+۴\,\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۳}+۶\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲}+۴\,\text{ا}_{۳}\,\text{لا}+\text{ا}_{۴}=۰$$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات کے سر، $\text{ا}_{۰}$، ھ، ع اور جے کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں۔

مساوات سے دوسری رقم خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے (127)

$$\text{م}^{۴}+\frac{۶\,\text{ھ}}{\text{ا}_{۰}^{۲}}\,\text{م}^{۲}+\frac{۴\,\text{گ}}{\text{ا}_{۰}^{۳}}\,\text{م}+\frac{\text{ا}_{۰}^{۲}\,\text{ع}-۳\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}_{۰}^{۴}}=۰$$

اور اصلوں کی علامتیں بدلنے سے

$$\text{م}^{۴}+\frac{۶\,\text{ھ}}{\text{ا}_{۰}^{۲}}\,\text{م}^{۲}-\frac{۴\,\text{گ}}{\text{ا}_{۰}^{۳}}\,\text{م}+\frac{\text{ا}_{۰}^{۲}\,\text{ع}-۳\,\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}_{۰}^{۴}}=۰$$

اِن استحالوں سے تفاعلوں (عہ ـ یہ)$^{۲}$ وغیرہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن موخرالذکر مساوات میں گ $\to$ گ ہو جاتا ہے اور اس کے دوسرے سر غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لئے مربع دار فرقوں کی مساوات کے سروں میں گ صرف جفت قوتوں میں داخل ہو سکتا ہے۔ اور دفعہ ۳۷ کی متماثلہ مساوات کی مدد سے گ$^{۲}$ ساقط کیا جا سکتا ہے اور ا، ع، ھ، جے داخل کئے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ہر جفت تفاعل ا، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور اس میں گ طاق قوتوں میں داخل نہیں ہوتا۔

## ۶۲ — جذروں کے ذریعہ چار درجی کا دوسرا حل۔ فرض کرو کہ

چار درجی مساوات

$$ا\,لا^{۴} + ۴\,ب\,لا^{۳} + ۶\,ج\,لا^{۲} + ۴\,د\,لا + س = ۰$$

حسب سابق شکل

$$ی^{۴} + ۶\,ھ\,ی^{۲} + ۴\,گ\,ی + ا^{۲}ع - ۳\,ھ^{۲} = ۰$$

میں رکھی گئی ہے جہاں $ی \equiv ا\,لا + ب$

اس مساوات کی اصل کے لئے اب ہم جملہ

$$ی = \sqrt{ق}\,\sqrt{ر} + \sqrt{ر}\,\sqrt{ف} + \sqrt{ف}\,\sqrt{ق}$$

فرض کرتے ہیں جس میں تین غیر تابع جذر $\sqrt{ف}$، $\sqrt{ر}$، $\sqrt{ق}$ شامل ہیں۔

دو مرتبہ مربع لینے سے اور تحویل کرنے سے

$$(ی^{۲} - ق\,ر - ر\,ف - ف\,ق)^{۲} = ۴\,ف\,ق\,ر\,(۲\,ی + ف + ق + ر)$$

یا

$$ی^{۴} - ۲\,(ق\,ر + ر\,ف + ف\,ق)\,ی^{۲} - ۸\,ف\,ق\,ر\,ی + (ق\,ر + ر\,ف + ف\,ق)^{۲} - ۴\,(ف + ق + ر)\,ف\,ق\,ر = ۰$$

اس مساوات کا مقابلہ ی کی قبل الذکر مساوات کے ساتھ کیا جائے تو

ق ر + ر ف + ف ق = - ۳ ھ ، ف ق ر = - گ/۲ ،

ف + ق + ر = (اُ² ع - ۱۲ ھ²) / ۲ گ ،

جس سے ظاہر ہے کہ ف ، ق ، ر مساوات

۲ گ ت³ + (۱۲ ھ² - اُ² ع) ت² - ۶ ھ گ ت + گ² = ۰

کی اصلیں ہیں ۔ (128

اس مساوات کو بہ آسانی یولر کے کعبی میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔ بالواسطہ

ت = گ^(۱/۲) / (ھ - اُ ط)

کے اندراج سے اور گ² کی بجائے اس کی قیمت ھ ، ع ، جے کی رقوم میں رکھنے سے ہم اس کو محول کعبی کی معیاری شکل یعنی شکل

۴ اُ³ ط³ - ع اُ ط + جے = ۰

میں تحویل کر سکتے ہیں ۔

حل کے اس طریقہ میں ہمیں کسی ایسے ابہام سے جو دفعہ ۶۱ میں واقع ہوا تھا واسطہ نہیں پڑتا ۔ کیونکہ ی کی قیمت کے طور پر جو جملہ یہاں مان لیا گیا ہے اس کی صرف چار قیمتیں ہیں حالانکہ دفعہ ماسبق میں ی کے لئے جو شکل اختیار کی گئی تھی اسکی آٹھ قیمتیں تھیں ۔ یہ بات اس وجہ سے ہے کہ شامل ہونے والے جذر دوہری علامت رکھتے ہیں بتماثلہ مساوات

۲ (√ق √ر + √ر √ف + √ف √ر)

= (√ف + √ق + √ر)² - ف - ق - ر

سے یہ امر بالکل واضح ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس دفعہ کے جذری جملہ کی قیمتوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی (√ف + √ق + √ر)² کی قیمتوں کی

یعنے چار۔

چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں ف، ق، ر کو بیان کرنیکے لئے لا کو یہ چار قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ دینے سے

$$ی_1 \equiv ا\,عہ + ب = \sqrt{ق}\,\sqrt{ر} - \sqrt{ر}\,\sqrt{ف} - \sqrt{ف}\,\sqrt{ق}$$

$$ی_2 \equiv ا\,بہ + ب = -\sqrt{ق}\,\sqrt{ر} + \sqrt{ر}\,\sqrt{ف} - \sqrt{ف}\,\sqrt{ق}$$

$$ی_3 \equiv ا\,جہ + ب = -\sqrt{ق}\,\sqrt{ر} - \sqrt{ر}\,\sqrt{ف} + \sqrt{ف}\,\sqrt{ق}$$

$$ی_4 \equiv ا\,ضہ + ب = \sqrt{ق}\,\sqrt{ر} + \sqrt{ر}\,\sqrt{ف} + \sqrt{ف}\,\sqrt{ق}$$

طالب علم بہ آسانی اس امر کا اطمینان کرسکتا ہے کہ جذروں کی علامتوں کا کوئی اور اجتماع ایسا نہیں ہے جس سے ان چار قیمتوں کے علاوہ کوئی مختلف قیمت حاصل ہو۔

$ی_2 + ی_3 - ی_1 - ی_4$ اور $ی_2\,ی_3 - ی_1\,ی_4$ کی قیمتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ا\,(بہ + جہ - عہ - ضہ) = -۴\,\sqrt{ق}\,\sqrt{ر}$$

$$ا^2(بہ\,جہ - عہ\,ضہ) + ا\,ب\,(بہ + جہ - عہ - ضہ) = ۴\,ف\,\sqrt{ق}\,\sqrt{ر}$$

ان سے اور ان سے مشابہ مساواتیں ۳ استعمال کرنے سے ربط $گ = -۲\,ف\,ق\,ر$ (129)
کے ذریعہ ہم ف، ق، ر کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں حسب ذیل طریقوں پر بیان کرسکتے ہیں:-

$$-ف = ا\,\frac{بہ\,جہ - عہ\,ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} + ب = \frac{۸\,گ}{ا^2\,(بہ + جہ - عہ - ضہ)^2}\,،$$

$$-ق = ا\,\frac{جہ\,عہ - بہ\,ضہ}{جہ + عہ - بہ - ضہ} + ب = \frac{۸\,گ}{ا^2\,(جہ + عہ - بہ - ضہ)^2}\,،$$

$$-ر = ا \frac{عہ بہ - جہ ضہ}{عہ + بہ - جہ - ضہ} + ب = \frac{۸ گ}{ا^{۲}(عہ + بہ - جہ - ضہ)^{۲}}$$

۶۳ — چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ فرض کرو کہ

چار درجی

$$ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ۶ ج لا^{۲} + ۴ د لا + س$$

کو دو مربعوں کے فرق[۱] کی شکل یعنی شکل

$$(ا لا^{۲} + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ)^{۲} - (۲ م لا + ن)^{۲}$$

میں بیان کیا گیا ہے۔

دئے ہوئے چار درجی کو ا سے ضرب دو اور اس جملہ کے ساتھ اسکا مقابلہ کرو تو ذیل کی مساواتیں مقداروں م، ن اور طہ کو متعین کرنیکے لئے حاصل ہونگی۔

$$م^{۲} = ب^{۲} - ا ج + ا^{۲} طہ ، \quad م ن = ب ج - ا د + ۲ ا ب طہ ،$$

$$ن^{۲} = (ج + ۲ ا طہ)^{۲} - ا س$$

اِن مساواتوں سے م اور ن کو ساقط کرو تو

$$۴ ا^{۳} طہ^{۳} - (ا س - ۴ ب د + ۳ ج^{۲}) ا طہ + ا ج س + ۲ ب ج د$$
$$- ا د^{۲} - س ب^{۲} - ج^{۳} = ۰$$

جو وہی محول کعبی ہے جسکو پہلے حاصل کیا جا چکا ہے۔

---

[۱] چار درجی کو دو مربعوں کے فرق میں تحویل کرنا سب سے پہلا طریقہ تھا جو درجہ چہارم کی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا گیا تھا۔ حل کا یہ طریقہ فیراری (Ferrari) نے دریافت کیا تھا۔ اگرچہ بعض مصنف اس کو سمپسن (Simpson) سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو نوٹ ا)۔

دفعہ آئندہ میں جو طریقہ بیان کیا گیا ہے اسمیں چار درجی کو بالراست دو درجی اجزائے کے حاصل ضرب کے مساوی رکھا گیا ہے یہ طریقہ ڈیکارٹ کا طریقہ ہے۔

اِس مساوات سے طہ کی تین قیمتیں (طہ$_1$، طہ$_2$، طہ$_3$) ملتی ہیں جن کے جواب میں م$^2$، م ن، ن$^2$ کی تین قیمتیں ملیں گی ۔ پس چار درجی کی مفروضہ شکل کے تمام سر تین جداگانہ طریقوں سے متعین ہوتے ہیں ۔ 3(1)
مزید برآں یہ ظاہر ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں ن کی ایک واحد قیمت ملتی ہے کیونکہ

م ن = ب ج − ا د + ۲ ا ب طہ

چار درجی

(ا لا$^2$ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ)$^2$ − (۲ م لا + ن)$^2$

کو صریحاً دو دو درجی اجزائے ضربی

ا لا$^2$ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ − ۲ م لا − ن ،

اور　ا لا$^2$ + ۲ ب لا + ج + ۲ ا طہ + ۲ م لا + ن

یعنے

ا لا$^2$ + ۲ (ب − م) لا + ج + ۲ ا طہ − ن ،

اور　ا لا$^2$ + ۲ (ب + م) لا + ج + ۲ ا طہ + ن

میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ۔ اگر طہ کو اس کی تین قیمتیں طہ$_1$، طہ$_2$، طہ$_3$ دیجائیں تو ابتدائی چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے تین زوج حاصل ہوتے ہیں اور مسئلہ بالکلیہ حل ہو جاتا ہے ۔

اِس حل اور جذروں والے حل میں جو تعلق ہے اسکو واضح کرنیکے لئے فرض کرو کہ مندرجہ بالا ترتیب میں لکھے ہوئے دو درجی اجزائے ضربی کی اصلیں به، جه اور عه، ضه ہیں اور یہ کہ دو درجی اجزا کے بقیہ زوجوں کی اصلیں اسیطرح جه، عه اور به، ضه؛ عه، به اور جه، ضه ہیں تو

به + جه = − $\frac{۲}{ا}$ (ب − م$_1$)، جه + عه = − $\frac{۲}{ا}$ (ب − م$_2$)، عه + به = − $\frac{۲}{ا}$ (ب − م$_3$)،

عه + ضه = − $\frac{۲}{ا}$ (ب + م$_1$)، به + ضه = − $\frac{۲}{ا}$ (ب + م$_2$)، جه + ضه = − $\frac{۲}{ا}$ (ب + م$_3$)

جہاں

$$م_1 \equiv \sqrt{ب^2 - اج + ا^2 ط_1}\ ،\quad م_2 \equiv \sqrt{ب^2 - اج + ا^2 ط_2}\ ،$$

$$م_3 \equiv \sqrt{ب^2 - اج + ا^2 ط_3}\ ،$$

اِن آخری مساواتوں میں سے دو دو مساواتیں لیکر ایک کو دوسرے میں سے تفریق کیا جائے تو

$$به + جه - عه - ضه = ۴\frac{م_1}{ا}\ ،\quad جه + عه - به - ضه = ۴\frac{م_2}{ا}\ ،$$

$$عه + به - جه - ضه = ۴\frac{م_3}{ا}\ ،$$

اور چونکہ

$$عه + به + جه + ضه = -۴\frac{ب}{ا}$$

اسلئے

$$ا\,عه + ب = -م_1 + م_2 + م_3\ ،$$

$$ا\,به + ب = م_1 - م_2 + م_3\ ،$$

$$ا\,جه + ب = م_1 + م_2 - م_3\ ،$$

$$ا\,ضه + ب = -م_1 - م_2 - م_3$$

اِس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار درجی کی اصلیں یہاں ایسے ضابطوں (131)
سے علیحدہ علیحدہ بیان ہوئی ہیں جو دفعہ ۱۶ کے ضابطوں کے مماثل ہیں۔ $م^2$ کی قیمتیں یعنی $م_1^2$، $م_2^2$، $م_3^2$ فی الحقیقت یولر کے کعبی کی اصلوں کے مماثل ہیں۔ نیز $م_1$، $م_2$، $م_3$ میں شامل ہونیوالے جذروں کی علامتوں پر ایسی قید موجود ہے جو دفعہ ۱۶ میں عائد کردہ قید کے مشابہ ہے۔ کیونکہ دو درجی اجزائے ضربی کی اصلوں کے لحاظ سے جو مفروضات اوپر تسلیم کئے گئے ہیں

ان کی وجہ سے ہمیں مساوات

$$ا^2(بہ + جہ - عہ - ضہ)(جہ + عہ - بہ - ضہ)(عہ + بہ - جہ - ضہ) = 64\, م_1 م_2 م_3 ،$$

ملتی ہے جو ربط ذیل کو مستلزم ہے (دیکھو مثال ۲۰ صفحہ ۷۲)

$$م_1 م_2 م_3 = \frac{1}{2} گ$$

اور اس ربط کے ذریعہ $م_1$، $م_2$، $م_3$ کی علامتیں مقید ہوتی ہیں جیسا کہ دفعہ ماسبق میں واضح کیا جا چکا ہے۔

اس آخری مساوات کی مدد سے ہم $م_3$ کو اصلوں کے جملوں سے ساقط کر سکتے ہیں اور اس طرح چار درجی کی سب اصلوں کو (جیسا کہ دفعہ ۶۱ میں کیا گیا) ایک واحد ضابطہ میں یعنی

$$ا لا + ب = م_1 + م_2 - \frac{گ}{2\, م_1 م_2}$$

میں حاصل کرتے ہیں جسمیں جذور

$$م_1 \equiv \sqrt{ب^2 - اج + ا^2 ط_1} \quad اور \quad م_2 = \sqrt{ب^2 - اج + ا^2 ط_2}$$

پوری عمومیت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ل، م، ن ہوں یعنی

بہ جہ + عہ ضہ، جہ عہ + بہ ضہ، عہ بہ + جہ ضہ

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے آخری سروں کو جمع کرنے سے

$$بہ جہ + عہ ضہ = 4 ط_1 + 2\frac{ج}{ا} ،$$

$$جہ عہ + بہ ضہ = 4 ط_2 + 2\frac{ج}{ا} ،$$

$$عہ بہ + جہ ضہ = 4 ط_3 + 2\frac{ج}{ا}$$

جہاں طہ$_1$، طہ$_2$، طہ$_3$ محول کعبی کی اصلیں ہیں۔ پس مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے (دیکھو دفعہ ۳۹، مثالیں ۴، ۵)۔

جواب:- (ا لا - ۲ ج)$^3$ - ۴ ع (ا لا - ۲ ج) + ۱۶ جے = ۰

۲ ـــ مثال ماسبق کی مساواتوں کے ذریعہ محول کعبی کی اصلوں کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کرو۔ (132)

$\frac{۲ ج}{ا}$ کی بجائے اسکی قیمت عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں درج کرنے سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ

۱۲ طہ$_1$ = ۲ لہ - مہ - نہ ≡ (جہ - عہ)(بہ - ضہ) - (عہ - بہ)(جہ - ضہ)،

۱۲ طہ$_2$ = ۲ مہ - نہ - لہ ≡ (عہ - بہ)(جہ - ضہ) - (بہ - جہ)(عہ - ضہ)،

۱۲ طہ$_3$ = ۲ نہ - لہ - مہ ≡ (بہ - جہ)(عہ - ضہ) - (جہ - عہ)(بہ - ضہ)

۳ ـــ مثال (۱) میں طہ$_1$، طہ$_2$، طہ$_3$ کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ہیں اُنکے ذریعہ دفعہ ۶۱ مثال ۵ کے اُن نتیجوں کی تصدیق کرو جن سے چار درجی اور محول کعبی کی اصلیں مربوط ہوتی ہیں۔

۴ ـــ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$\frac{1}{۸}$ (بہ جہ - عہ ضہ)(بہ + جہ - عہ - ضہ)، $\frac{1}{۸}$ (جہ عہ - بہ ضہ)(جہ + عہ - بہ - ضہ)،

$\frac{1}{۸}$ (عہ بہ - جہ ضہ)(عہ + بہ - جہ - ضہ)

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی سے ہم معلوم کرتے ہیں

$\frac{۴ م_1}{ا}$ = بہ + جہ - عہ - ضہ، - $\frac{۲ ن_1}{ا}$ = بہ جہ - عہ ضہ

نیز م$_1$ ن$_1$ = ب ج - ا د + ۲ ا ب طہ$_1$ = - ا$^2$ فہ$_1$

جہاں مطلوبہ کعبی کی اصلیں فہ$_1$، فہ$_2$، فہ$_3$ سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک خطی استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔

جواب:- (ا$^2$ فہ + ب ج - ا د)$^3$ - ب$^2$ ع (ا$^2$ فہ + ب ج - ا د) - ۲ ب$^3$ جے = ۰

۵ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{بہ جہ - عہ ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} ، \frac{جہ عہ - بہ ضہ}{جہ + عہ - بہ - ضہ} ، \frac{عہ بہ - جہ ضہ}{عہ + بہ - جہ - ضہ}$$

اگر فہ اِن میں سے کسی تفاعل کو بلا امتیاز تعبیر کرے اور اس کے جواب میں محول کعبی کی اصل طہ سے تعبیر ہو تو پچھلے نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$-۲ فہ = \frac{م ن}{م_۲} = \frac{ب ج - ا د + ۲ ا ب طہ}{ب^۲ - ا ج + ا^۲ طہ}$$

اور اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک ہم رسم استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔
اس ضابطہ کو زیادہ سہولت بخش شکل

$$ا فہ + ب = \frac{\frac{۱}{۲} گ}{ا^۲ طہ - ھ}$$

میں رکھا جاسکتا ہے جسکے ذریعہ مطلوبہ کعبی شکل ذیل میں حاصل ہوتا ہے:۔

$$۲ گ (ا فہ + ب)^۳ + (ا^۲ ع - ۱۲ ھ^۲)(ا فہ + ب)^۲$$
$$- ۶ ھ گ (ا فہ + ب) - گ^۲ = ۰$$

جس کو پھیلا کر $ا^۳$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ گ فہ^۳ + (ا^۲ س + ۶ ب^۲ ج - ۹ ا ج^۲ + ۲ ا ب د) فہ^۲ + ۲ (ا ب س$$
$$+ ۲ ب^۲ د - ۳ ا ج د) فہ + ب^۲ س - ا د^۲ = ۰$$

(دیکھو مثال ۱۴ صفحہ ۱۲۰)

133) ۶ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{ا^۲}{۴}(بہ جہ - عہ ضہ)^۲ ، \frac{ا^۲}{۴}(جہ عہ - بہ ضہ)^۲ ، \frac{ا^۲}{۴}(عہ بہ - جہ ضہ)^۲$$

یہ $ن^۲$ کی تین قیمتیں ہیں دیکھو دفعہ ۶۳۔ پہلے کی طرح انہیں سے کسی قیمت کو فہ سے تعبیر کیا جائے تو مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استحالہ

$$ف = \frac{٢ ب ج د - ا د^٢ - س ب^٢ + ٢ ا ب د ط}{ج - ا ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہوسکتی ہے ۔

٧ ۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{بہ جہ - عہ ضہ}{(بہ + جہ) عہ ضہ - (عہ + ضہ) بہ جہ} ، \frac{جہ عہ - بہ ضہ}{(جہ + عہ) بہ ضہ - (بہ + ضہ) جہ عہ} ،$$

$$\frac{عہ بہ - جہ ضہ}{(عہ + بہ) جہ ضہ - (جہ + ضہ) عہ بہ}$$

مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استحالہ

$$٢ فہ = \frac{ج د - ب س + ٢ ا د ط}{د^٢ - ج س + ا س ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے ۔

اس نتیجہ کو مثال ۵ سے اخذ کیا جا سکتا ہے وہ اس طرح کہ اصلوں کو ان کے تکافیوں میں تبدیل کیا جائے اور اس تبدیلی کے جواب میں سروں میں تبدیلیاں عمل میں لائی جائیں ۔

## ٦٤ ۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ۔ دوسرا طریقہ

فرض کرو کہ چار درجی

$$ا لا^٤ + ٤ ب لا^٣ + ٦ ج لا^٢ + ٤ د لا + س$$

کو دو درجی اجزائے ضربی

$$ا (لا^٢ + ٢ ف لا + ق) (لا^٢ + ٢ فَ لا + قَ)$$

میں تحلیل کیا گیا ہے ۔ ان دو شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\left. \begin{array}{l} ف + فَ = ٢ \frac{ب}{ا} ، ق + قَ + ٤ ف فَ = ٦ \frac{ج}{ا} \\ ف قَ + فَ ق = ٢ \frac{د}{ا} ، ق قَ = \frac{س}{ا} \end{array} \right\} \ldots\ldots (١)$$

اب اگر ہمارے پاس شکل

فا (ف ، ق ، فَ ، قَ) = فہ

کی کوئی پانچویں مساوات ہوتی تو ہم ف ، فَ ، ق ، قَ کو ساقط کر سکتے اور اس طرح ایسی مساوات معلوم کر سکتے جس سے فہ کی مختلف قیمتیں حاصل ہوتیں۔

اس پانچویں مساوات کا ف فَ = فہ یا ق + قَ = فہ ہونا مان لیا جا سکتا ہے جہاں ہر صورت میں فہ ایک کعبی مساوات سے معلوم ہوگا کیونکہ انہیں سے
134) ہر تفاعل کی صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ان کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ فرض کرنا کہ

$$فہ = \frac{ج}{ا} - ف فَ = \frac{1}{4}\left(ق + قَ - \frac{2ج}{ا}\right)$$

زیادہ سہولت بخش ہے۔ ف ، فَ ، ق ، قَ کے یہ دو تفاعل مساواتوں (۱) میں سے دوسری مساوات کی رو سے مساوی ہیں۔ ان مساواتوں کی مدد سے ہم بہ آسانی یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$ف ق + فَ قَ = \frac{4 ا ب ج - 2 ا^2 د}{ا^3} + \frac{8 ب فہ}{ا}$$

اور متماثل ربط

$$(ف^2 + فَ^2)(ق^2 + قَ^2) \equiv (ف قَ - فَ ق)^2 + (ف ق + فَ قَ)^2$$

کے ذریعہ ف ، فَ ، ق ، قَ کو ساقط کرنے سے مساوات

$$4 ا^3 فہ^3 - ع ا فہ + جے = 0$$

برآمد ہوتی ہے جو وہی محول کعبی ہے جسے حل کے پچھلے طریقوں سے حاصل کیا گیا تھا۔

اس طریقہ سے ف فَ یا ق + قَ کو معلوم کرنے کے بعد ہم مساواتوں (۱) کے ذریعہ چار درجی کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے عمل کی تکمیل کر سکتے ہیں۔

پانچویں مساوات کی شکل کے متعلق جو مفروضہ ہم نے اوپر اختیار کیا ہے اس کی وجہ ظاہر ہے۔ فہ کی مفروضہ قیمتوں کا دفعہ ۳۶ مثال (۱) کی

مساواتوں کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ فہ وہی ہے جو طہ دفعہ ماسبق میں تھا۔ اور اس لئے ہم یہ پیش بینی کرتے ہیں کہ ف، ف، ق، ق کے اسقاط سے فہ میں ایسی مساوات حاصل ہونی چاہئے جو حاصل کردہ محول کبھی کے مماثل ہو۔ عام طور پر اگر فہ سے ل، مہ، نہ کے فرقوں کا کوئی تفاعل تعبیر ہو جسکا لازمی نتیجہ یہ ہوگا کہ اس سے عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ایک جفت تفاعل تعبیر ہوگا (دیکھو دفعہ ۲۷ مثال ۱۸) تو وہ مساوات جس کی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ایسی ہوگی کہ اس کے سر ا، ھ، ع، اور ج کے تفاعل ہونگے۔

اگر فہ حسب ذیل مثالوں میں سے دوسری مثال کے جملوں میں سے کسی ایک کے مساوی فرض کیا جائے تو فہ میں وہ مساوات جسکی اصلیں اس جملہ کی مختلف قیمتیں ہوں حسب شرح بالا ف، فَ، ق، قَ کے ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔

## مثالیں (135)

۱۔ $ی^۴ + ۶ ھ ی^۲ + ۴ گ ی + ا^۲ ع - ۳ ھ^۲$

کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

اس شکل کا حاصل ضرب

$(ی^۲ + ۲ ف ی + ق)(ی^۲ - ۲ ف ی + قَ)$

کے ساتھ مقابلہ کرو تو ف کے لئے حسب ذیل مساوات ملیگی:-

$$۴ ف^۶ + ۱۲ ھ ف^۴ + ۱۲ \left( ھ^۲ - \frac{ا^۲ ع}{۱۲} \right) ف^۲ - گ^۲ = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۶۱)

اور $ا^۲ فہ = ف^۲ + ھ \equiv \frac{۱}{۴} (ق + قَ - ۲ ھ)$

رکھنے سے یہ مساوات، ا^۲ سے تقسیم کرنیکے بعد، ہو جائیگی

۴ ا^۳ فہ^۳ − ع ا فہ + جے = ۰

۲ — اگر ایک چار درجی جملہ کو دو دو درجی اجزائے ضربی

لا^۲ + ف لا + ق ، لا^۲ + فَ لا + قَ

میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ (۱) فہ ایک کعبی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی ممکن قیمتیں اختیار کرے جو حسب ذیل نمونوں میں سے ہر ایک کے متناظر ہیں :—

ق + قَ ، (ق − قَ)/(ف − فَ) ، (ف قَ − فَ ق)/(ف − فَ) ، (ف قَ − فَ ق)/(ق − قَ)

(ف − فَ)^۲ ، (ف − فَ)(ق − قَ) ، (ق − قَ)^۲ ، (ف قَ − فَ ق)^۲

اور (۲) فہ ایک چھ درجی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی قیمتیں اختیار کرے جو

ف ، ق ، ف − فَ ، ف قَ − فَ ق ، ف^۲ − ۴ ق ، یا ق − ق

کے متناظر ہیں ۔

اِن تفاعلوں کو اصلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے ہر تفاعل کی ممکن قیمتوں کی تعداد معلوم ہوتی ہے ۔

## ۶۵ — چار درجی کا متکافی شکل میں استحالہ ۔ اس استحالہ کو عمل میں لانیکے لئے ہم مساوات

ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ ج لا^۲ + ۴ د لا + س = ۰

میں لا = ک ما + ر درج کرتے ہیں جس سے اس کی شکل ہو جاتی ہے

ا ک^۴ ما^۴ + ۴ ع_۱ ک^۳ ما^۳ + ۶ ع_۲ ک^۲ ما^۲ + ۴ ع_۳ ک ما + ع_۴ = ۰

جہاں

ع_۱ ≡ ا ر + ب ، ع_۲ ≡ ا ر^۲ + ۲ ب ر + ج ، ع_۳ ≡ ا ر^۳ + ۳ ب ر^۲ + ۳ ج ر + د وغیرہ

(دیکھو دفعہ ۳۵) ۔ اگر یہ مساوات متکافی ہو تو ک اور س معلوم کرنیکے لئے ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں یعنی

$$ا ک^{4} = ع_{2} ، ک^{3} ع_{1} = ک ع_{3}$$

(136) ک کو ساقط کرنے سے س کے لئے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ا ع_{3}^{2} - ع_{1}^{2} ع_{2} = ۰$$

اور چونکہ

$$ک^{2} = \frac{ع_{3}}{ع_{1}} = \frac{ا س^{3} + ۳ ب س^{2} + ۳ ج س + د}{ا س + ب}$$

اس لئے س کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی دو قیمتیں مساوی مگر مختلف العلامت ہیں ۔

مساوات

$$ا ع_{3}^{2} - ع_{1}^{2} ع_{2} = ۰$$

کو جب اندراجات (دفعات ۳۶ ، ۳۷)

$$ا^{2} ع_{2} \equiv ع_{1}^{3} + ۳ ھ ع_{1} + گ ،$$

$$ا^{3} ع_{3} \equiv ع_{1}^{4} + ۶ ھ ع_{1}^{2} + ۴ گ ع_{1} + ا^{2} ع - ۳ ھ^{2}$$

کے ذریعہ تحویل کیا جائے تو وہ ہو جاتی ہے

$$۲ گ ع_{1}^{3} + (ا^{2} ع - ۱۲ ھ^{2}) ع_{1}^{2} - ۶ گ ھ ع_{1} - گ^{2} = ۰ \qquad (۱)$$

جو ایک کعبی مساوات ہے جس سے $ع_{1} \equiv ا س + ب$ کی تعیین ہوتی ہے اور اگر ہم رکھیں

$$ا س + ب = \frac{\frac{1}{2} گ}{ا^{2} ط - ھ}$$

تو معیاری محول کعبی

۴ ا^۲ طہ^۳ - ع ا طہ + ب جے = ۰

سے طہ متعین ہوجاتا ہے۔

اس استحالہ کو چار درجی کے حل کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے[۱] اور یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ مکعبی (۱) جو یہاں پیش ہوا ہے دفعہ ۶۲ کے مکعبی سے صرف اسقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی اصلیں اُس کی اصلوں سے مختلف العلامت ہیں۔

اب ہم ک اور ر کو چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کرینگے۔ چونکہ ما کی مساوات جو لا = ک ما + ر رکھنے سے حاصل ہوئی ہے، متکافی ہے اسلئے اسکی اصلیں شکل ما۱، ما۲، ۱/ما۲، ۱/ما۱ کی ہیں۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں

عہ = ک ما۱ + ر، بہ = ک ما۲ + ر، جہ = ک ۱/ما۲ + ر

ضہ = ک ۱/ما۱ + ر

اور اس لئے

(137) (عہ - ر) (ضہ - ر) = (بہ - ر) (جہ - ر) = ک^۲

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ر = (بہ جہ - عہ ضہ) / (بہ + جہ - عہ - ضہ)

اور - ک^۲ = (جہ - عہ) (بہ - ضہ) (عہ - بہ) (جہ - ضہ) / (بہ + جہ - عہ - ضہ)^۲

---

[۱] چار درجی مساوات کو متکافی شکل میں تحویل کر کے حل کرنیکا یہ طریقہ مسٹر ایس۔ ایس گریٹ ہیڈ (S. S. Great heed) نے کیمبرج میتھامیٹیکل جرنل جلد اول میں بیان کیا ہے۔

ک اور ی جو اس استحالہ میں داخل ہوتے ہیں انکی ایک اہم ہندسی تعبیر دیجا سکتی ہے - ایک خط مستقیم پر ایک ثابت مبداء و لو اور فرض کرو کہ اِس پر کے چار نقطوں ا، ب، ج، د کے فاصلے و ا، و ب، و ج، و د مساوات

$$\text{ا لا}^4 + 4\,\text{ب لا}^3 + 6\,\text{ج لا}^2 + 4\,\text{د لا} + \text{س} = 0$$

کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ سے متعین ہوئے ہیں - نیز فرض کرو کہ دو درجی مساواتوں کے حسب ذیل تین جوڑوں

$$(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ}) = 0,\quad (\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$
$$(\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{عہ}) = 0,\quad (\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$
$$(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ}) = 0,\quad (\text{لا} - \text{جہ})(\text{لا} - \text{ضہ}) = 0$$

سے دریچ کے جو تین نظام متعین ہوتے ہیں انکے مرکز و$_1$، و$_2$، و$_3$ اور اُن کے ماسکے ف$_1$، $\bar{\text{ف}}_1$ اور ف$_2$، $\bar{\text{ف}}_2$ اور ف$_3$، $\bar{\text{ف}}_3$ ہیں - تب ہمیں مساواتیں ملینگی

$$\text{و}_1\text{ب} \times \text{و}_1\text{ج} = \text{و}_1\text{ا} \times \text{و}_1\text{د} = \text{و}_1\text{ف}_1^2\text{، وغیرہ}$$

جنکو مستحیل کر کے مساواتوں

$$(\text{بہ} - \text{ی})(\text{جہ} - \text{ی}) = (\text{عہ} - \text{ی})(\text{ضہ} - \text{ی}) = \text{ک}^2\text{، وغیرہ}$$

کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ ثابت ہوتا ہے کہ ی کی تین قیمتیں و و$_1$، و و$_2$، و و$_3$ ہیں یعنے ثابت مرکز سے دریچ کے تین مرکزوں کے فاصلے نیز چونکہ و$_1$ف$_1^2$ = ک$^2$ اسلئے ک کی چھ قیمتیں ہیں جو ہندسی طور پر فاصلوں

$$\text{و}_1\text{ف}_1\text{، و}_1\bar{\text{ف}}_1\text{، و}_2\text{ف}_2\text{، و}_2\bar{\text{ف}}_2\text{، و}_3\text{ف}_3\text{، و}_3\bar{\text{ف}}_3$$

سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں و$_1$ف$_1$ + و$_1\bar{\text{ف}}_1$ = ۰، وغیرہ کیونکہ فاصلے مخالف سمتوں میں ناپے گئے ہیں -

ہم صرف ہندسی نقطۂ نگاہ سے دریچ کے مرکزوں اور ماسکوں کو (138)

عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس طرح اُن نتیجوں کی مزید تصدیق جو ابھی ثابت ہوئے ہیں حسب ذیل طریقہ پر کرتے ہیں۔

چونکہ نظام $[\text{ف}_1\ \text{ب}\ \bar{\text{ف}}_1\ \text{ج}]$ اور $[\text{ف}_1\ \text{ا}\ \bar{\text{ف}}_1\ \text{د}]$ موسیقی ہیں اسلئے

$$\frac{2}{\text{ف}_1\bar{\text{ف}}_1} = \frac{1}{\text{ف}_1\text{ب}} + \frac{1}{\text{ف}_1\text{ج}} = \frac{1}{\text{ف}_1\text{ا}} + \frac{1}{\text{ف}_1\text{د}}$$

اور اگر $\text{ف}_1$ یا $\bar{\text{ف}}_1$ کا فاصلہ ثابت مبدا و سے لا ہو تو

$$\frac{1}{\text{لا} - \text{بہ}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{جہ}} = \frac{1}{\text{لا} - \text{عہ}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{ضہ}}$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$\text{لا} = \frac{\text{بہ جہ} - \text{عہ ضہ}}{\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}} \pm \frac{\sqrt{-(\text{جہ} - \text{عہ})(\text{بہ} - \text{ضہ})(\text{عہ} - \text{بہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})}}{\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}}$$

یا $\text{لا} = \text{ر} \pm \text{ک}$

جس سے $\text{ر} = \frac{\text{وف}_1 + \text{و}\bar{\text{ف}}_1}{2}$

$$\text{ک} = \pm \frac{\text{وف}_1 - \text{و}\bar{\text{ف}}_1}{2} = \pm\, \text{وف}_1$$

# مثال

کعبی

$$\text{ا لا}^3 + 3\,\text{ب لا}^2 + 3\,\text{ج لا} + \text{د}$$

کو متکافی شکل میں تحویل کرو۔

$\text{لا} = \text{ک ما} + \text{ر}$ فرض کرنے سے مساوات

$$- گ\, ع_1^{3} + ۳\, ھ^{2} ع_1^{2} + ھ^{3} = ۰$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $ع_1 \equiv ا\, ر + ب$ ۔

ر کی قیمتیں بہ آسانی حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{به\, جه - عه^{2}}{به + جه - ۲\, عه} ، \frac{جه\, عه - به^{2}}{جه + عه - ۲\, به} ، \frac{عه\, به - جه^{2}}{عه + به - ۲\, جه}$$

اس صورت میں ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر محور پر تین نقطے اَ، بَ، جَ لئے جائیں اس طور پر کہ ب اور ج کے لحاظ سے ا کا موسیقی مزدوج اَ ہو، ج اور ا کے لحاظ سے ب کا بَ، ا اور ب کے لحاظ سے ج کا جَ تو ر اور ک کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی:—

$$ر = \frac{و\,ا + و\,اَ}{۲} ، ک = \frac{و\,ا - و\,اَ}{۲}$$

عه، به، جه کی رقوم میں و اَ، و بَ، و جَ کی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۱۳ صفحہ (۱۲۷)۔

## ۶۶ — اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے چار درجی کا حل۔ (139)

اس طریقہ سے چار درجی کے حل کو ایک کعبی کے حل میں تحویل کرنا اُسوقت ممکن ہے جب چار اصلوں عه، به، جه، ضه کے ایسے تفاعل بنانا ممکن ہو جو صرف تین قیمتیں قبول کریں اگر اصلوں کو باہم دگر ہر طرح ایک دوسری جگہ بدل دیا جائے۔ دفعہ ۶۴ مثال ۲ کے حوالہ سے یہ معلوم ہوگا کہ اس نوعیت کے مختلف تفاعل وجود رکھتے ہیں۔ یہ تفاعل دفعہ ۵۹ کے مماثل تفاعلوں کی طرح یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ تین تین کے کوئی ایسے دو جٹ اس طور پر مربوط ہوتے ہیں کہ کسی جٹ کا کوئی ایک تفاعل دوسرے جٹ کے ایک تفاعل کے ساتھ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط رکھتا ہے۔ اس مسئلہ کو آئندہ ثابت کیا جائیگا۔

موجودہ حل کے مقاصد کو پیش نظر رکھکر ہم وہ تفاعل استعمال کرتے ہیں

جن کا حوالہ دفعہ ۵۵ میں دیا گیا ہے کیونکہ اِن سے بالراست چار درجی کی اصلوں کیلئے جملے سروں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں ۔ اس لئے اب ہم وہ مساوات بنائینگے جسکی اصلیں

$$\text{ت} \equiv \left(\frac{\text{عہ} + \text{طہ}\,\text{بہ} + \text{طہ}^2\,\text{جہ} + \text{طہ}^3\,\text{ضہ}}{4}\right)^2$$

کی تین قیمتیں ہوں جبکہ اصلوں کا ہر طرح ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کیا جائے اور $\text{طہ} = -1$ ۔

یہ قیمتیں ہیں

$$\text{ت}_1 \equiv \left(\frac{\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}}{4}\right)^2, \quad \text{ت}_2 \equiv \left(\frac{\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}}{4}\right)^2,$$

$$\text{ت}_3 \equiv \left(\frac{\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ}}{4}\right)^2$$

اور چونکہ

$$(\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ})^2 \equiv \Sigma\,\text{عہ}^2 + 2\,\text{لہ} - 2\,\text{مہ} - 2\,\text{نہ},$$

$$\Sigma(\text{عہ} - \text{بہ})^2 \equiv 3\,\Sigma\,\text{عہ}^2 - 2\,\text{لہ} - 2\,\text{مہ} - 2\,\text{نہ} = -48\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2},$$

اسلئے $\text{ت}_1$، $\text{ت}_2$، $\text{ت}_3$ کی قیمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{2\,\text{لہ} - \text{مہ} - \text{نہ}}{12} - \frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2}, \quad \frac{2\,\text{مہ} - \text{نہ} - \text{لہ}}{12} - \frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2}, \quad \frac{2\,\text{نہ} - \text{لہ} - \text{مہ}}{12} - \frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2}$$

جس سے

$$\text{ت}_1 + \text{ت}_2 + \text{ت}_3 = -3\,\frac{\text{ھ}}{\text{ا}^2}$$

پھر چونکہ

$$\Sigma(2\,\text{مہ} - \text{نہ} - \text{لہ})(2\,\text{نہ} - \text{لہ} - \text{مہ}) = -3(\text{لہ}^2 + \text{مہ}^2 + \text{نہ}^2 - \text{مہ}\,\text{نہ} - \text{نہ}\,\text{لہ} - \text{لہ}\,\text{مہ}) \quad (140)$$

$$= -\frac{3}{2}\,\Sigma(\text{مہ} - \text{نہ})^2$$

اور

$$\Sigma(\text{مہ} - \text{نہ})^2 = 24\,\frac{\text{ع}}{\text{ا}^2}$$

اسلئے

$$ت_۲ ت_۳ + ت_۳ ت_۱ + ت_۱ ت_۲ = \frac{۳ هـ^۲}{ا^۲} - \frac{۱}{۹۶} \sum (م - ن)^۲ = \frac{۳ هـ^۲}{ا^۲} - \frac{ع}{۴ ا^۲}$$

نیز

$$ت_۱ ت_۲ ت_۳ = \frac{گ^۲}{۴ ا^۲}$$

پس وہ مساوات جس کی اصلیں $ت_۱$، $ت_۲$، $ت_۳$ ہیں ہو جاتی ہے

$$(ا^۲ ت)^۳ + ۳ هـ (ا^۲ ت)^۲ + \left(۳ هـ^۲ - \frac{ا^۲ ع}{۴}\right)(ا^۲ ت) - \frac{گ^۲}{۴} = ۰$$

یا $گ^۲$ کی بجائے اُسکی قیمت دفعہ ۳ سے درج کرنے سے

$$۴ (ا^۲ ت + هـ)^۳ - ا^۲ ع (ا^۲ ت + هـ) + ا^۳ جـ = ۰$$

جو $ا^۲ ت + هـ = ا^۲ ط$ کے ابدال سے معیاری محول کعبی میں تحویل ہوتا ہے ۔

عہ، بہ، جہ، ضہ کو متعین کرنیکے لئے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$-عہ + بہ + جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_۱}، \quad عہ - بہ + جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_۲}،$$

$$عہ + بہ - جہ - ضہ = ۴\sqrt{ت_۳}$$

اور نیز

$$عہ + بہ + جہ + ضہ = -۴ \frac{ب}{ا}$$

اِن سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$عہ = -\frac{ب}{ا} - \sqrt{ت_۱} + \sqrt{ت_۲} + \sqrt{ت_۳}،$$

$$بہ = -\frac{ب}{ا} + \sqrt{ت_۱} - \sqrt{ت_۲} + \sqrt{ت_۳}،$$

$$جہ = -\frac{ب}{ا} + \sqrt{ت_۱} + \sqrt{ت_۲} - \sqrt{ت_۳}،$$

$$ضہ = -\frac{ب}{ا} - \sqrt{ت_۱} - \sqrt{ت_۲} - \sqrt{ت_۳}$$

141) نیز $\sqrt{ت_1}$ ، $\sqrt{ت_2}$ ، $\sqrt{ت_3}$ کی متذکرۂ بالا قیمتوں سے مساوات

$$\sqrt{ت_1}\,\sqrt{ت_2}\,\sqrt{ت_3} = \frac{گ}{۲ا^۳}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے ذریعہ ایک جذر کو دوسرے دو جذروں کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے اور پھر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اصل کے لئے عام ضابطہ وہی ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے۔

اس دفعہ کے مضمون کے سلسلہ میں چار درجی کی اصلوں کے ایسے دو تفاعلوں کا ذکر کر دینا سہولت بخش ہے جو ایسے خواص رکھتے ہیں جو دفعہ ۵۹ میں کعبی کی اصلوں کے متناظر تفاعلوں کے ثابت شدہ خواص کے مشابہ ہیں۔ محولہ بالا دفعہ کی ترقیم کے مماثل ترقیم اختیار کرنے سے اِن تفاعلوں کو ل، مہ، کی رقوم میں شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$ل \equiv (بہ\,جہ + عہ\,ضہ) + سہ\,(جہ\,عہ + بہ\,ضہ) + سہ^2\,(عہ\,بہ + جہ\,ضہ)،$$

$$مہ \equiv (بہ\,جہ + عہ\,ضہ) + سہ^2\,(جہ\,عہ + بہ\,ضہ) + سہ\,(عہ\,بہ + جہ\,ضہ)$$

دفعہ ۶۳ مثال (۱) کی مساواتوں کے ذریعہ اِن تفاعلوں کو محول کعبی کی اصلوں کی رقوم میں شکل

$$\frac{1}{4}\,ل = ط_1 + سہ\,ط_2 + سہ^2\,ط_3 ،$$

$$\frac{1}{4}\,مہ = ط_1 + سہ^2\,ط_2 + سہ\,ط_3$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ نیز اِن کو دفعہ ہذا کی اُس مساوات کی مدد سے جو ت اور طہ کو مربوط کرتی ہے $ت_1$ ، $ت_2$ ، $ت_3$ کی رقوم میں حسب طریقۂ ذیل بیان کیا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{4}\,ل = ت_1 + سہ\,ت_2 + سہ^2\,ت_3 ،$$

$$\frac{1}{4}\,مہ = ت_1 + سہ^2\,ت_2 + سہ\,ت_3$$

یہ تفاعل ل اور م، چار درجی کے نظریہ میں اتنی ہی اہمیت رکھتے ہیں جتنی اہمیت دفعہ ۵۹ کے تفاعل کعبی کے نظریہ میں رکھتے ہیں۔ ان جملوں کے مکعب چار مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہر طرح آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ وہ مندرجۂ بالا محول کعبی کے محول دو درجی کی اصلیں ہیں اور چار درجی کے ہر بیان شدہ حل میں موجود رہتی ہیں۔

# مثالیں

(142)

۱۔ ثابت کرو کہ ل اور م، اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

عہ، بہ، جہ، ضہ کو بقدر ھ کے بڑھانے سے ل اور م غیر متغیر رہتے ہیں کیونکہ $\text{١} + \text{س} + \text{س}^{2} = 0$۔

۲۔ اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

$\text{ط}_1$، $\text{ط}_2$، $\text{ط}_3$ کی رقوم میں ل اور م کی قیمتوں سے ہم بہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

$$١٢\,\text{ا}\,\text{ط}_1 = \text{ل} + \text{م}،\quad \text{ل} - \text{م} = (\text{به} - \text{جه})(\text{عه} - \text{ضه})(\text{س}^2 - \text{س})،$$

$$١٢\,\text{ا}\,\text{ط}_2 = \text{س}^2\text{ل} + \text{س}\,\text{م}،\quad \text{س}^2\text{ل} - \text{س}\,\text{م} = (\text{جه} - \text{عه})(\text{به} - \text{ضه})(\text{س}^2 - \text{س})،$$

$$١٢\,\text{ا}\,\text{ط}_3 = \text{س}\,\text{ل} + \text{س}^2\text{م}،\quad \text{س}\,\text{ل} - \text{س}^2\text{م} = (\text{عه} - \text{به})(\text{جه} - \text{ضه})(\text{س}^2 - \text{س})،$$

پھر ان مساواتوں سے طرفین کی رقموں کو باہم ضرب دیکر اور یہ یاد رکھکر کہ $\text{ط}_1$، $\text{ط}_2$، $\text{ط}_3$ مساوات

$$٤\,\text{ا}^3\text{ط}^3 - \text{ع}\,\text{ا}\,\text{ط} + \text{جے} = 0$$

کی اصلیں ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$\text{ل}^3 + \text{م}^3 = -\,٤٣٢\,\frac{\text{جے}}{\text{ا}^3}$$

ل$^{۳}$ - م$^{۳}$ = ۳ √-۳ (بہ - جہ)(جہ - عہ)(عہ - بہ)(عہ - ضہ)(بہ - ضہ)(جہ - ضہ)

نیز انہی رقموں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

۲ ل م = ۲۴ $\frac{۱}{ل^{۲}}$ = (بہ - جہ)$^{۲}$(عہ - ضہ)$^{۲}$ + (جہ - عہ)$^{۲}$(بہ - ضہ)$^{۲}$ + (عہ - بہ)$^{۲}$(جہ - ضہ)$^{۲}$

اور چونکہ

(ل$^{۳}$ - م$^{۳}$)$^{۲}$ = (ل$^{۳}$ + م$^{۳}$)$^{۲}$ - ۴ ل$^{۳}$ م$^{۳}$

اسلئے ان مقداروں کی بجائے انکی قیمتیں قبل الذکر مساواتوں سے حاصل کرکے درج کرنے سے بالآخر ہمیں حاصل ہوگا

ل$^{۶}$ (بہ - جہ)$^{۲}$(جہ - عہ)$^{۲}$(عہ - بہ)$^{۲}$(عہ - ضہ)$^{۲}$(بہ - ضہ)$^{۲}$(جہ - ضہ)$^{۲}$

= ۲۵۶ (ع$^{۳}$ - ۲۷ جے$^{۲}$)

۳— دفعہ ۵۹ کی مساواتوں کا مقابلہ دفعہ ہذا کی مساواتوں کے ساتھ کرنیسے ثابت کرو کہ قبل الذکر کے نتیجوں کو چار درجی کے لئے توسیع دیجا سکتی ہے اگر

بہ - جہ، جہ - عہ، عہ - بہ کو علی الترتیب

-(بہ - جہ)(عہ - ضہ)، -(جہ - عہ)(بہ - ضہ)، -(عہ - بہ)(جہ - ضہ)

میں بدلدیا جائے اور اس کے ساتھ ہی ھ کو - $\frac{۲}{۳}$ ع میں اور گ کو ۱۶ جے میں۔

## ۶۷— چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات۔

چوتھے باب (دفعہ ۴۴) میں فرقوں کی مساوات بنانیکے عام مسئلہ کا ذکر کیا گیا تھا لگرانج نے یہ تجویز پیش کی تھی کہ اس مساوات کو کسی دی ہوئی عددی مساوات کی اصلوں کو جدا کرنے کی غرض کے لئے استعمال کیا جائے چنانچہ اس نے اسکے اس استعمال کو پیش نظر رکھ کر مربع دار فرقوں کی مساوات کی عام شکلیں جو چوتھے اور پانچویں درجہ کی اُن مساواتوں کے لئے محسوب کی تھیں جنمیں دوسری
(143) رقم غائب تھی

*Traite de la Resolution des Equations Numerique*

نوٹ سوم) ۔ اگرچہ کہ عملی مقاصد کے لئے اصلوں کو جدا کرنیکے وہ طریقے قابل ترجیح ہیں جو آیندہ بیان کئے جائینگے تاہم اس باب کے مضامین کے سلسلہ میں چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات کا ذکر کردینا کافی دلچسپی کا باعث ہوگا۔ چنانچہ ہم عام سے عام شکل میں چار درجی کے لئے یہ مساوات محسوب کرینگے ۔ دفعہ ۶۱ مثال ۷، امیں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اسکے مطابق یہ معلوم ہوگا کہ حاصل ہونیوالی مساوات کے سر سب کے سب لؔ، ھ، ع اور جے کی رقوم میں بیان ہوسکتے ہیں ۔

یہ مسئلہ فی الحقیقت اس کے مماثل ہے کہ حسب ذیل حاصل ضرب کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے :۔

$$\{\text{فہ}-(\text{بہ}-\text{جہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{جہ}-\text{عہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{عہ}-\text{بہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{عہ}-\text{ضہ})\}^2$$

$$\times\{\text{فہ}-(\text{بہ}-\text{ضہ})^2\}\{\text{فہ}-(\text{جہ}-\text{ضہ})^2\}$$

اس حاصل ضرب کو معلوم کرنیکا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ان چھ اجزائے ضربی میں سے دو دو کے جٹ بنائے جائیں اور ایسے تین حاصل ضربوں کو (جنکو ہم $\Pi_1$، $\Pi_2$، $\Pi_3$ سے تعبیر کرینگے) علٰحدہ علٰحدہ محول کعبی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کیا جائے اور آخر میں حاصل ضرب $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ کو لؔ، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کیا جائے ۔

$$\Pi_1 \equiv \text{فہ}^2-\{(\text{بہ}-\text{جہ})^2+(\text{عہ}-\text{ضہ})^2\}\,\text{فہ}+(\text{بہ}-\text{جہ})^2(\text{عہ}-\text{ضہ})^2،$$

اور دفعہ ۶۱ کے نتیجوں کی مدد سے ہم $(\text{بہ}-\text{جہ})^2$، $(\text{عہ}-\text{ضہ})^2$ کے لئے بہ آسانی حسب ذیل جملے اخذ کرتے ہیں :۔

$$4\left(\sqrt{\text{طہ}_2-\frac{\text{ھ}}{2\text{ل}}}-\sqrt{\text{طہ}_3-\frac{\text{ھ}}{2\text{ل}}}\right)^2،\quad 4\left(\sqrt{\text{طہ}_2-\frac{\text{ھ}}{2\text{ل}}}+\sqrt{\text{طہ}_3-\frac{\text{ھ}}{2\text{ل}}}\right)^2$$

پس بغیر کسی مشکل کے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Pi_1 \equiv \text{فہ}^2+\left(8\,\text{طہ}_1+16\,\frac{\text{ھ}}{2\text{ل}}\right)\text{فہ}+4\,\frac{\text{ع}}{2\text{ل}}-48\,\text{طہ}_2\,\text{طہ}_3$$

اختصار کی خاطر ترقیم

١٢ ا ھ ≡ ا$^{٢}$ ف، ٤ ع ≡ ا$^{٢}$ ق، ١٦ جے ≡ ا$^{٣}$ ر،

فہ$^{٢}$ + ف فہ + ق ≡ پہ

کو داخل کیا جائے تو π$_{١}$ ہو جاتا ہے پہ + ٨ طہ$_{١}$ فہ - ٤٨ طہ$_{٢}$ طہ$_{٣}$

حاصل ضرب π$_{١}$، π$_{٢}$، π$_{٣}$ کو مثال ١٨ صفحہ (١٢٨) سے تحویل کیا جائے تو

پہ$^{٣}$ + ٣ ق پہ$^{٢}$ - (٤ ق فہ$^{٢}$ + ١٨ ر فہ) پہ - (٨ ر فہ$^{٣}$ + ١٢ ق$^{٢}$ فہ$^{٢}$

+ ٣٦ ق ر فہ + ٢٧ ر$^{٢}$) = ٠

آخر لام پہ کی قیمت درج کرنے سے ہمیں ف، ق، ر کی رقوم میں مربع دار فرقوں کی مساوات ملیگی

فہ$^{٦}$ + ٣ ف فہ$^{٥}$ + (٣ ف$^{٢}$ + ٢ ق) فہ$^{٤}$ + (ف$^{٣}$ + ٨ ف ق - ٢٦ ر) فہ$^{٣}$

+ (٦ ف$^{٢}$ ق - ٧ ق$^{٢}$ - ١٨ ف ر) فہ$^{٢}$ + ٩ ق (ف ق - ٦ ر) فہ

+ ٤ ق$^{٣}$ - ٢٧ ر$^{٢}$ = ٠[1]

144) ا، ھ، ع، جے کی رقوم میں یہ مساوات حسب ذیل ہوگی

ا$^{٦}$ فہ$^{٦}$ + ٤٨ ا$^{٤}$ ھ فہ$^{٥}$ + ٨ ا$^{٢}$ (٩٦ ھ$^{٢}$ + ا$^{٢}$ ع) فہ$^{٤}$ + ٣٢ (١٢٨ ھ$^{٣}$

+ ١٢ ا$^{٢}$ ھ ع - ١٣ ا$^{٣}$ جے) فہ$^{٣}$ + ١٦ (٣٨٤ ھ$^{٢}$ ع - ٧ ا$^{٢}$ ع$^{٢}$ - ٢٨٨ ا ھ جے) فہ$^{٢}$

+ ١١٥٢ (٢ ھ ع - ٣ ا جے) ع فہ + ٢٥٦ (ع$^{٣}$ - ٢٧ جے$^{٢}$) = ٠

یہ قابل توجہ ہے کہ π$_{١}$ کے لئے جو قیمت اوپر حاصل کی گئی ہے اسکو مساوات

طہ$_{٢}$ طہ$_{٣}$ = طہ$_{١}^{٢}$ - $\frac{١}{٤ ا^{٢}}$ کی مدد سے طہ$_{١}$ کے دو درجی تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اور اس کے بعد کا عمل حساب اس دو درجی اور محول کعبی کے

---

[1] مربع دار فرقوں کی مساوات کو اس شکل میں پہلے مسٹر ایم۔ رابرٹس نے Nouvelles Annales de Mathematiques کی سولہویں جلد میں دیا تھا۔

درمیان طہ، کو ساقط کرنے سے جاری رکھا جاسکتا ہے۔

**۶۸ — چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کی جانچ** - اِس تحقیقات کو جاری کرنے سے پیشتر دفعہ ۴۳ میں جو بیان کیا گیا ہے اُسکا دہرانا ضروری ہے اور وہ یہ کہ جب کسی جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی شرط سروں کے ایک تفاعل کی علامت سے تعبیر ہو تو ان سروں کا حقیقی عددی مقداروں کو تعبیر کرنا فرض کرلیا جاتا ہے۔ مزید بریں یہ بھی تسلیم کرلیا جاتا ہے کہ سب سے بڑے درجہ کی رقم کا سر معدوم نہیں ہوتا جیساکہ مذکورۂ بالا دفعہ میں کیا گیا تھا۔

حسب سابق فرض کرو کہ Δ سے سروں کا وہ تفاعل تعبیر ہوتا ہے (اِس کو ہم ممیز کہینگے) جسکو ایک مثبت عددی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو وہ اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

اب دفعات گذشتہ کے ثابت شدہ مسئلوں سے مساوات ملتی ہے

$$ل^{۶}(بہ - جہ)^{۲}(جہ - عہ)^{۲}(عہ - بہ)^{۲}(عہ - ضہ)^{۲}(بہ - ضہ)^{۲}(جہ - ضہ)^{۲} = ۲۵۶\,\Delta$$

جہاں

$$\Delta \equiv ع^{۳} - ۲۷\,ج^{۲}$$

ذیل میں اصلوں کی نوعیت کی بحث کو سہولت کے مدنظر تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی (۱) جب Δ معدوم ہو یا (۲) جب وہ منفی ہو یا (۳) جب وہ مثبت ہو۔

(۱) جب Δ معدوم ہو تو مساوات میں مساوی اصلیں ہوتی ہیں

یہ امر Δ کی مندرجۂ بالا قیمت سے ظاہر ہے۔ اب چار مختلف صورتیں برآمد ہوتی ہیں۔ (عہ) جب صرف دو اصلیں مساوی ہوں۔ اِس صورت میں ع اور ج علحدہ علحدہ معدوم نہیں ہوتے۔ (بہ) جب تین اصلیں مساوی ہوں، اس صورت میں علحدہ علحدہ ع = ۰ اور ج = ۰ (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۶۱)۔ (جہ) جب اصلوں کے دو مختلف زوج مساوی ہوں۔

(45)- اس صورت میں شرطیں ہونگی گ = ۰، ا$^{۲}$ ع - ۱۲ ھ$^{۲}$ = ۰ (دفعہ ۶۱ مثال ۳) دفعہ ۷، ۳ کی متماثلہ کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ شرطیں مساوات △ = ۰ کو مستلزم ہیں۔ پس یہ دو مساواتیں، مساوات △ = ۰ کے ساتھ ملکر صرف دو شرطوں کے مماثل ہیں۔ (ضہ) جب سب اصلیں مساوی ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶۱ سے تین شرطیں ھ = ۰، ع = ۰ اور جے = ۰ اخذ کیجا سکتی ہیں۔ اِن کو ایک ایسی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جو دفعہ ۳۴ کی صورت (۴) کی شرطوں کے لئے حاصل کردہ شکل کے مشابہ ہو۔

(۲) جب، △ منفی ہو تو مساوات کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوتی ہیں اصلوں کی رقوم میں △ کی قیمت سے اِسکو اخذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ جب سب اصلیں حقیقی ہوں تو △ صریحاً مثبت ہے اور جب، عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے مناسب خیالی جملے یعنی ہ ± ک √-۱ ، ہَ ± کَ √-۱ درج کئے جاتے ہیں تو فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ △ مثبت ہے اُسوقت بھی جبکہ سب اصلیں خیالی ہوں۔

(۳) جب، △ مثبت ہو تو یا تو سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب اصلیں خیالی۔ اسکو بھی △ کی قیمت سے حاصل کیا جا سکتا ہے کیونکہ عہ، بہ کی بجائے ہ ± ک √-۱ درج کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ △ منفی ہے جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس لئے اِس صورت میں یعنی جب، △ مثبت ہو سروں کا صرف یہ تفاعل ہی اصلوں کی نوعیت کو پوری طرح متعین کرنے میں کافی نہیں ہے کیونکہ پھر بھی یہ امر مشتبہ رہ جاتا ہے کہ آیا سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب خیالی۔ مزید شرطیں جو اِن دو صورتوں میں تمیز پیدا کرنیکے لئے ضروری ہیں بولر کے کعبی (دفعہ ۶۱) سے اس طرح حاصل کیجا سکتی ہیں:- سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونیکے لئے یہ ضروری

ہے کہ علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں اور جب علامتیں اس نوعیت کی ہوں تو کعبی کوئی حقیقی منفی اصل نہیں رکھ سکتا۔ اسلئے ہم دفعہ ۶۱ مثال ۲ کی مدد سے اس صورت پر منطبق ہونیوالا مندرجۂ ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:۔

جب $\Delta$ مثبت ہو تو ہر صورت میں چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں سوائے اس صورت کے جب یہ شرطیں پوری ہوں کہ ھ منفی اور $\text{ا}^2\text{ع} - 12\,\text{ھ}^2$ منفی ہو اور ایسی صورت میں سب اصلیں حقیقی ہونگی۔

# مثالیں (146)

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ھ مثبت ہو یا اگر ھ = ۰ (اور گ $\neq 0$) تو کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہوگا۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ھ منفی ہو تو کعبی کی اصلیں:۔ (۱) سب حقیقی اور غیر مساوی (۲) دو مساوی یا (۳) دو خیالی ہونگی بموجب اسکے کہ $\text{گ}^2$ (۱) چھوٹا، (۲) مساوی یا (۳) بڑا ہو $-4\,\text{ھ}^3$ سے۔

۳۔ اگر کعبی مساوات

$$\text{ا}_0\text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_1\text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_2\text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$

کی دو اصلیں عہ کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$-\text{عہ} = \frac{\text{ھ}_2}{\text{ھ}_1} = \frac{\text{ھ}_1}{\text{ھ}}$$

جہاں $\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2 \equiv \text{ھ}$، $\text{ا}_0\text{ا}_3 - \text{ا}_1\text{ا}_2 \equiv 2\,\text{ھ}_1$، $\text{ا}_1\text{ا}_3 - \text{ا}_2^2 \equiv \text{ھ}_2$

۴۔ اگر

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ب}\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{د} + \text{ک}\,(\text{لا} - \text{ر})^3$$

کامل مکعب ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)\,\text{ر}^2 + (\text{ا}\,\text{د} - \text{ب}\,\text{ج})\,\text{ر} + (\text{ب}\,\text{د} - \text{ج}^2) = 0$$

۵ — وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی

$$\text{ا}\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ب}\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ج}\,\text{لا} + \text{د}$$

کو شکل

$$\text{ل}\,(\text{لا} - \text{عہ}_1)^3 + \text{م}\,(\text{لا} - \text{بہ}_1)^3 + \text{ن}\,(\text{لا} - \text{جہ}_1)^3$$

میں لکھا جا سکے جہاں $\text{عہ}_1$، $\text{بہ}_1$، $\text{جہ}_1$ کعبی مساوات

$$\text{ا}_1\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ب}_1\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ج}_1\,\text{لا} + \text{د}_1 = 0$$

کی اصلیں ہیں۔

شکلوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ا} = \text{ل} + \text{م} + \text{ن}،$$

$$-\text{ب} = \text{ل}\,\text{عہ}_1 + \text{م}\,\text{بہ}_1 + \text{ن}\,\text{جہ}_1،$$

$$\text{ج} = \text{ل}\,\text{عہ}_1^2 + \text{م}\,\text{بہ}_1^2 + \text{ن}\,\text{جہ}_1^2،$$

$$-\text{د} = \text{ل}\,\text{عہ}_1^3 + \text{م}\,\text{بہ}_1^3 + \text{ن}\,\text{جہ}_1^3$$

نیز $\text{ا}_1\,\text{عہ}_1^3 + 3\,\text{ب}_1\,\text{عہ}_1^2 + 3\,\text{ج}_1\,\text{عہ}_1 + \text{د}_1 = 0$، وغیرہ

اسلئے ان مساواتوں کو علی الترتیب $\text{د}_1$، $3\text{ج}_1$، $3\text{ب}_1$، $\text{ا}_1$ سے ضرب دو اور جمع کرو تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$(\text{ا}\,\text{د}_1 - \text{ا}_1\,\text{د}) - 3\,(\text{ب}\,\text{ج}_1 - \text{ب}_1\,\text{ج}) = 0$$

۶ — اگر عہ، بہ، جہ کعبی مساوات

$$\text{ا}_0\,\text{لا}^3 + 3\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ا}_3 = 0$$

کی اصلیں ہوں تو مساوات

$$\sqrt[3]{\text{لا} - \text{عہ}} + \sqrt[3]{\text{لا} - \text{بہ}} + \sqrt[3]{\text{لا} - \text{جہ}} = 0$$

کو ناطق بناؤ اور نتیجہ کو $\text{ا}_0$، $\text{ا}_1$، $\text{ا}_2$، $\text{ا}_3$ کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب:- $\text{۱۲۵ ع}_1^4 + \text{۳۶۰ ھ ع}_1^2 + \text{۲۸ اگ ع}_1 - \text{۴۸ ھ}^2 = ۰$

۷ـ اگر دو درجی مساواتوں (147)

$$\text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{۲ ب}_1\text{لا} + \text{ج}_1 = ۰ \text{ ، } \text{ا}_2\text{لا}^2 + \text{۲ ب}_2\text{لا} + \text{ج}_2 = ۰$$

کی اصلیں $\text{ع}_1$، $\text{ب}_1$ اور $\text{ع}_2$، $\text{ب}_2$ ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $\text{ع}_1\text{ع}_2$ کی چار قیمتیں ہوں ـ

فرض کرو $\text{ھ}_1 \equiv \text{ا}_1\text{ج}_1 - \text{ب}_1^2$ ، $\text{ھ}_2 \equiv \text{ا}_2\text{ج}_2 - \text{ب}_2^2$

جواب:- $(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ}^2 - \text{۲ ب}_1\text{ب}_2\text{فہ} + \text{ج}_1\text{ج}_2)^2 - \text{۴ ھ}_1\text{ھ}_2\text{فہ}^2 = ۰$

نوٹ:- یہ اور نیچے کی دو مثالیں فہ کو اُن جذروں میں بیان کرنے سے جنمیں مساواتوں کے سر شامل ہوں حل ہو سکتی ہیں ـ

۸ـ مثال ۷ کی ترقیم استعمال کرکے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں $\frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{۲}$ کی چار قیمتیں ہوں ـ

فرض کرو $\text{۲ ک}_{12} \equiv \text{ا}_1\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ج}_1 + \text{۲ ب}_1\text{ب}_2$

جواب:- $[\text{۲ ا}_1\text{ا}_2\text{فہ}^2 + ۲(\text{ا}_1\text{ب}_2 + \text{ا}_2\text{ب}_1)\text{فہ} + \text{ک}_{12}]^2 - \text{ھ}_1\text{ھ}_2 = ۰$

اِس مثال میں حاصل ہونیوالا چار درجی ایسا ہے کہ گ = ۰ ـ

۹ـ اسی صورت میں اگر $\text{فہ} = \frac{1}{4}(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2$ تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ـ

فرض کرو $\text{م} \equiv \text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1$ ، $\text{۲ ھ}_{12} \equiv \text{ا}_1\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ج}_1 - \text{۲ ب}_1\text{ب}_2$

جواب:- $\{(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ} + \text{ھ}_{12})^2 - \text{۲ م}^2\text{فہ} + \text{ھ}_1\text{ھ}_2\}^2 = \text{۴ ھ}_1\text{ھ}_2(\text{ا}_1\text{ا}_2\text{فہ} + \text{ھ}_{12})^2$

۱۰ـ ثابت کرو کہ جب چار درجی میں ایک دوہری اصل ہو تو اُس کعبی میں جسکی اصلیں س کی قیمتیں ہیں (دفعہ ۶۵) وہی دوہری اصل ہوگی ـ نیز معلوم کرو کہ چار درجی کی

تین اصلیں مساوی ہوں تو یہ کعبی کیا ہو جاتا ہے۔

۱۱۔ اگر ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو بلا واسطہ (یولر کے کعبی کی امداد کے بغیر) ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں۔

اصلوں کی رقوم میں ھ کے لئے جو جملہ ہے (مثال ۱۹ صفحہ ۲۰۷) اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب ھ مثبت ہو تو خیالی اصلوں کا کم از کم ایک زوج ہ ± ک $\sqrt{-1}$ ہونا چاہئے۔ اب سب اصلوں کو بقدر ہ کے گھٹانے سے اور انکو ک سے تقسیم کرنے سے (کیونکہ ان استحالوں سے اصلوں کے دوسرے زوج جہ، ضہ کی نوعیت پر کوئی اثر نہیں پڑیگا اور نہ ھ اور جے کی علامتوں پر) چار درجی کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے :۔

$$( لا^2 + ۲ ف لا + ق ) ( لا^2 + ۱ )$$

یا $لا^4 + ۲ ف لا^3 + ۶ ج لا^2 + ۲ ف لا + ق$، جہاں ۶ ج = ق + ۱

جس سے $ھ = ج - ف^2$ ، $ع = ق - ۴ ف^2 + ۳ ج^2$ ،

$$جے = ق ج + ۲ ف^2 ج - ف^2 (ق + ۱) - ج^3 = ج (ق - ۴ ف^2 - ج^2)$$

اور اسلئے

$$ق - ۴ ف^2 = ج^2 + \frac{جے}{ج} = (ھ + ف^2)^2 + \frac{جے}{ھ + ف^2}$$

یا

$$- \left( \frac{جہ - ضہ}{۲ ک} \right)^2 = (ھ + ف^2)^2 + \frac{جے}{ھ + ف^2}$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ جہ اور ضہ خیالی ہیں جب ھ اور جے مثبت ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۶۱ مثال ۸)

148) ۱۲۔ اگر چار درجی کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو بلاواسطہ ثابت کرو کہ

$$ا^2 ع = ۱۲ ھ^2 ، \quad ا^3 جے = ۸ ھ^3$$

اس صورت میں چار درجی کو ا سے تقسیم کیا جائے تو وہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے

$$(\text{لا}-\text{عہ})^2(\text{لا}-\text{بہ})^2=\left\{\left(\text{لا}-\frac{\text{عہ}+\text{بہ}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{عہ}-\text{بہ}}{2}\right)^2\right\}^2=\left(\frac{\text{ی}^2-\text{ک}^2}{\text{ا}_0^2}\right)^2$$

جہاں $\text{ی}=\text{ا}_0\text{لا}+\text{ا}_1$ اور $\dfrac{\text{ک}}{\text{ا}_0}=\dfrac{\text{عہ}-\text{بہ}}{2}$

اب شکلوں

$$\text{ی}^4-2\text{ک}^2\text{ی}^2+\text{ک}^4 ،$$

اور

$$\text{ی}^4+6\text{ھ}\,\text{ی}^2+4\text{گ}\,\text{ی}+\text{ا}_0^2\text{ع}-3\text{ھ}^2$$

کا مقابلہ کرو تو

$$3\text{ھ}=-\text{ک}^2 ،\ \text{گ}=0 ،\ \text{ا}_0^2\text{ع}-3\text{ھ}^2=\text{ک}^4$$

جن سے اوپر کے ربط فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ طالب علم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتا ہے کہ یہ ربط دفعہ ۱۶۱ مثال ۳ کے ربطوں کے مماثل ہیں۔ نیز اس بات کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اس صورت میں چار درجی کے حل میں صرف ایک جذرالمربع شامل ہوتا ہے (جو دو درجی (لا - عہ)(لا - بہ) کے حل سے حاصل ہوتا ہے)۔

۱۳ — وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی کو شکل

$$\text{ل}(\text{لا}^2+2\text{ف}\,\text{لا}+\text{ق})^2+\text{م}(\text{لا}^2+2\text{ف}\,\text{لا}+\text{ق})+\text{ن}$$

میں رکھا جا سکے۔

اِس صورت میں دوسرے اور چوتھے سروں کو ایک ساتھ ایک ہی استحالہ سے خارج کیا جا سکتا ہے اور عام حل میں صرف دو جذرالمربع شامل ہوتے ہیں۔

جواب :— $\text{گ}=0$

۱۴ — ثابت کرو کہ چار درجی

$$\text{م}(\text{لا}-\text{ن})^4-\text{ن}(\text{لا}-\text{م})^4$$

کے لئے ج معدوم ہوتا ہے۔

۱۵ — اگر چار درجی کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ایک خط مستقیم پر کے مبداء سے چار نقطوں کے فاصلوں کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ جب یہ نقطے خط پر ایک

موسیقی تقسیم بناتے ہیں تو یولر کے کعبی کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں اور دفعہ ۶۲ کے کعبی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ۔

۱۶ — مساوات

$$\text{ا}_{\cdot}\,\text{لا}^{4} + 4\,\text{ا}_{1}\,\text{لا}^{3} + 6\,\text{ا}_{2}\,\text{لا}^{2} + 4\,\text{ا}_{3}\,\text{لا} + \text{ا}_{4} = \cdot$$

سے جو چار نقطے ایک خط مستقیم پر حاصل ہوتے ہیں مبداء سے اُن کے فاصلوں سے چھ غیر موسیقی تفاعل بنتے ہیں ۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ تفاعل ہوں ۔

وہ چھ غیر موسیقی نسبتیں یہ ہیں :—

$$\text{فہ}_{1}\text{، } \frac{1}{\text{فہ}_{1}}\text{، } \text{فہ}_{2}\text{، } \frac{1}{\text{فہ}_{2}}\text{، } \text{فہ}_{3}\text{، } \frac{1}{\text{فہ}_{3}}$$

جہاں

149) $$\text{فہ}_{1} = \frac{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})}{(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{لہ}-\text{مہ}}{\text{لہ}-\text{نہ}} = \frac{\text{طہ}_{1}-\text{طہ}_{2}}{\text{طہ}_{1}-\text{طہ}_{3}}\text{،}$$

$$\text{فہ}_{2} = \frac{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})}{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{مہ}-\text{نہ}}{\text{مہ}-\text{لہ}} = \frac{\text{طہ}_{2}-\text{طہ}_{3}}{\text{طہ}_{2}-\text{طہ}_{1}}\text{،}$$

$$\text{فہ}_{3} = \frac{(\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})}{(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})} \equiv \frac{\text{نہ}-\text{لہ}}{\text{نہ}-\text{مہ}} = \frac{\text{طہ}_{3}-\text{طہ}_{1}}{\text{طہ}_{3}-\text{طہ}_{2}}$$

نیز وہ مساوات جسکی اصلیں

$$(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{ضہ})\text{، } (\text{جہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{ضہ})\text{، } (\text{عہ}-\text{بہ})(\text{جہ}-\text{ضہ})$$

ہیں کعبیوں

$$\text{ا}_{\cdot}^{3}\,\text{ت}^{3} - 12\,\text{ا}_{\cdot}\,\text{ع}\,\text{ت} \pm 16\sqrt{\text{ع}^{3} - 27\,\text{ج}^{2}}$$

میں سے ایک ہے ۔

وہ مساوات جسکی اصلیں، انمیں سے کسی کعبی کی اصلوں کی نسبتیں بہ تبدیل علامت ہوں یہ ہوگی

$$4\,\Delta\,(\text{فہ}^{2}-\text{فہ}+1)^{3} - 27\,\text{ع}^{3}\,\text{فہ}^{2}(\text{فہ}-1)^{2} = \cdot\text{،}$$ (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۱۲۸)

جہاں $\Delta \equiv \text{ع}^{3} - 27\,\text{ج}^{2}$

فہ میں اس مساوات کی اصلیں مندرجۂ بالا چھ غیر موسیقی نسبتیں ہیں۔ اس مساوات کو زیادہ واضح شکل میں لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ ذیل کے مسئلوں سے ظاہر ہوگا۔

(ا) یہ چھ غیر موسیقی نسبتیں ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہیں

$$\text{فہ}،\ \frac{1}{\text{فہ}}،\ 1-\text{فہ}،\ \frac{1}{1-\text{فہ}}،\ \frac{\text{فہ}-1}{\text{فہ}}،\ \frac{\text{فہ}}{\text{فہ}-1}$$

مساوات متماثلہ

$$(\text{ب}-\text{ج})(\text{ع}-\text{ض})+(\text{ج}-\text{ع})(\text{ب}-\text{ض})+(\text{ع}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ض})\equiv 0$$

سے حسب ذیل روابط ملتے ہیں

$$\text{فہ}_1+\frac{1}{\text{فہ}_2}=1،\ \text{فہ}_2+\frac{1}{\text{فہ}_1}=1،\ \text{فہ}_3+\frac{1}{\text{فہ}_3}=1$$

اور ان سے تمام غیر موسیقی نسبتوں کو ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(ب) اگر غیر موسیقی نسبتوں میں سے دو نسبتیں مساوی ہو جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں $-\text{سہ}$ اور $-\text{سہ}^2$ ہونگی جن میں سے ہر ایک تین مرتبہ تکرار پائے گی اور اس صورت میں $\text{ع}=0$۔

کیونکہ فرض کرو $\text{فہ}_1=\text{فہ}_2$ تو مندرجۂ بالا ربطوں میں سے دوسرے سے

$$\text{فہ}_1^2-\text{فہ}_1+1=0$$

جس سے

$$\text{فہ}_1=-\text{سہ}\ \text{یا}\ -\text{سہ}^2$$

اور ان قیمتوں کو فہ کی بجائے (ا) میں درج کیا جائے تو تمام غیر موسیقی نسبتیں معلوم ہوتی ہیں۔

نیز چونکہ

$$\frac{\text{ل}-\text{م}}{\text{ل}-\text{ن}}+\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{ل}-\text{م}}=0\ \text{یا}\ \equiv(\text{م}-\text{ن})^2=0$$

اس لئے $ع \equiv ا_۰ ا_۴ - ۴ ا_۱ ا_۳ + ۳ ا_۲^۲ = ۰$

150) (ج) جب ان میں سے ایک نسبت موسیقی ہو تو فہ کی چھ قیمتیں $-۱$، $۲$، $\frac{۱}{۲}$ ہیں جنمیں سے ہر ایک دو مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ اور اس صورت میں $جے = ۰$۔ کیونکہ اگر

$$فہ_۱ = -۱ \text{ تو } \frac{لہ - مہ}{لہ - نہ} = -۱ \text{ یعنی } ۲ لہ - مہ - نہ = ۰$$

جو جے کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۱۷)۔

(د) یہ نتیجے اور ان کے عکس اس چھ درجی مساوات کو جو فہ میں ہے شکل ذیل میں لکھنے سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۷۴) :-

$$ع^۳ \left\{(فہ + ۱)(فہ - ۲)(فہ - \frac{۱}{۲})\right\}^۲ = ۲۷ جے^۲ \left\{(فہ + س)(فہ + س^۲)\right\}^۳$$

۱۷- ثابت کرو کہ مساوات

$$\left(\frac{لا^۴ + ۱۴ لا^۲ + ۱}{ر^۴ + ۱۴ ر^۲ + ۱}\right)^۳ = \frac{لا^۲ (لا^۲ - ۱)^۴}{ر^۲ (ر^۲ - ۱)^۴}$$

کے حل حسب ذیل ہیں:-

$$ر^۲ ، \frac{۱}{ر^۲} ، \left(\frac{۱ + طہ \sqrt{ر}}{۱ - طہ \sqrt{ر}}\right)^۴ ، \text{ جہاں } طہ^۴ = ۱$$

۱۸- $\Sigma (عہ - بہ)^۴ (جہ - ضہ)^۲$ کو $طہ_۱$، $طہ_۲$، $طہ_۳$ کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو اور پھر اسکو چار درجی کے سروں کی رقوم میں لکھو۔

**جواب:-** $-۱۲۸ \Sigma (طہ_۲ - طہ_۳)^۲ \left(طہ_۱ + \frac{۲ ھ}{ا_۰}\right)^۲ = -\frac{۹۶}{ا_۰^۲}(۴ ھ ع + ۱۳ ا جے)$

۱۹- $(بہ^۲ - جہ^۲)^۲ (عہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (جہ^۲ - عہ^۲)^۲ (بہ^۲ - ضہ^۲)^۲ + (عہ^۲ - بہ^۲)^۲ (جہ^۲ - ضہ^۲)^۲$ کو $طہ_۱$، $طہ_۲$، $طہ_۳$ کے منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو۔

یہ متشاکل تفاعل، جملہ

(مہ۲ - نہ۲)۲ + (نہ۲ - لہ۲)۲ + (لہ۲ - مہ۲)۲

= ۲۵۶ ∑ (طہ۲ - طہ۳)۲ (طہ۱ - ج/ا)۲

کے معادل ہے -

۲۰ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں چار درجی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے حاصل ضرب ہوں -

مطلوبہ مساوات جملہ

(فہ - بہ جہ)(فہ - عہ ضہ) = فہ۲ - لہ فہ + س/ا = فہ۲ - ۲ ج/ا فہ + س/ا - ۴ عہ طہ

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے -

جواب :- (ا فہ۲ - ۲ ج فہ + س)۳ - ۴ غ فہ۲ (ا فہ۲ - ۲ ج فہ + س) + ۱۶ جے فہ۳ = ۰

۲۱ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں، (عہ + بہ)/۲ کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ چار درجی کی اصلیں ہیں -

مطلوبہ مساوات جملہ

(فہ - (بہ + جہ)/۲)(فہ - (عہ + ضہ)/۲) = فہ۲ + ۲ ب/ا فہ + (مہ + نہ)/۴

= فہ۲ + ۲ ب/ا فہ + ج/ا - طہ۱

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے -

جواب :- ۴ (ا فہ۲ + ۲ ب فہ + ج)۳ - غ (ا فہ۲ + ۲ ب فہ + ج) + جے = ۰

۲۲ — ثابت کرو

$$\sum \frac{1}{(\text{عہ}-\text{بہ})^2} = \frac{9\,\text{ع}}{2}\left(\frac{3\,\text{ا}\,\text{جے} - 2\,\text{ھ}\,\text{ع}}{\text{ع}^3 - 27\,\text{جے}^2}\right)$$

$\text{طہ}_1$، $\text{طہ}_2$، $\text{طہ}_3$ کی رقوم میں عہ، بہ، جہ، ضہ کے لئے جو جملے ہیں اُن سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum \frac{1}{(\text{عہ}-\text{بہ})^2} = -\frac{1}{2\,\text{ا}^2}\left\{\frac{\text{ا}^2\text{طہ}_1^2+2\,\text{ھ}}{(\text{طہ}_2-\text{طہ}_3)^2}+\frac{\text{ا}^2\text{طہ}_2^2+2\,\text{ھ}}{(\text{طہ}_3-\text{طہ}_1)^2}+\frac{\text{ا}^2\text{طہ}_3^2+2\,\text{ھ}}{(\text{طہ}_1-\text{طہ}_2)^2}\right\}$$

جسکو ا، ھ، ع، جے کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۲۳ — ثابت کرو

$$\sum \frac{\text{طہ}_1^{\text{م}}}{(\text{طہ}_2-\text{طہ}_3)^2} = 0$$

جبکہ ع = ۰ اور م، ۳ پ یا ۳ پ + ۱ کی شکل کا ہو جہاں پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{ع} \equiv \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{ما}^2 + \text{س}\,\text{ی}^2 + 2\,\text{د}\,\text{ما}\,\text{ی} + 2\,\text{ج}\,\text{ی}\,\text{لا} + 2\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما}$$

کو دو مربعوں کے فرق یا مجموعے کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اگر

$$\text{جے} \equiv \text{ا}\,\text{ج}\,\text{س} + 2\,\text{ب}\,\text{ج}\,\text{د} - \text{ا}\,\text{د}^2 - \text{س}\,\text{ب}^2 - \text{ج}^3 = 0$$

یہاں

$$\text{ا}\,\text{ع} \equiv (\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی})^2 + (\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)\,\text{ما}^2$$
$$+ 2(\text{ا}\,\text{د} - \text{ب}\,\text{ج})\,\text{ما}\,\text{ی} + (\text{ا}\,\text{س} - \text{ج}^2)\,\text{ی}^2$$

اور

$$(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)\,\text{ما}^2 + 2(\text{ا}\,\text{د} - \text{ب}\,\text{ج})\,\text{ما}\,\text{ی} + (\text{ا}\,\text{س} - \text{ج}^2)\,\text{ی}^2$$

کامل مربع ہے اگر

$$(\text{ا}\,\text{ج} - \text{ب}^2)(\text{ا}\,\text{س} - \text{ج}^2) = (\text{ا}\,\text{د} - \text{ب}\,\text{ج})^2$$

یا

$$\text{جے} = 0$$

۲۵ — اگر مساوات

$$\text{ا}_{.}\,\text{لا}^{۴} + ۴\,\text{ا}_{۱}\,\text{لا}^{۳} + ۶\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{ا}_{۳}\,\text{لا} + \text{ا}_{۴} = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو سروں ا.، ا₁، ا₂ وغیرہ کی رقوم میں مساوات

$$\sqrt{\text{لا} - \text{عہ}} + \sqrt{\text{لا} - \text{بہ}} + \sqrt{\text{لا} - \text{جہ}} + \sqrt{\text{لا} - \text{ضہ}} = ۰$$

کو حل کرو۔

اگر $\sqrt{\text{عہ}} + \sqrt{\text{بہ}} + \sqrt{\text{جہ}} + \sqrt{\text{ضہ}} = ۰$

کو ناطق بنایا جائے اور عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے سروں کو درج کیا جائے تو

$$(۳\,\text{ا}_{.}\,\text{ا}_{۲} - ۲\,\text{ا}_{۱}^{۲})^{۲} = \text{ا}_{.}^{۳}\,\text{ا}_{۴}$$

اب ا.، ا₁، ا₂، ا₃، ا₄ کی بجائے ع.، ع₁، ع₂، ع₃، ع₄ درج کرنے سے اور تحویل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ا}_{.}\,\text{لا} + \text{ا}_{۱} = \frac{۱}{\text{گ}}\left(۳\,\text{ھ}^{۲} - \frac{\text{ا}_{.}^{۲}\,\text{ع}}{۴}\right)$$

۲۶ — چار درجی کی فرقوں کی مساوات اور تیم مجموعوں کی مساوات معلوم کرو (مثال ۲۱ صفحہ ۲۲۲) اور چار درجی کو صرف ایک استحالہ کے ذریعہ حل کرو۔ (152)

لا کی بجائے لاَ + س درج کرنے اور دفعہ ۶۵ کی ترقیم استعمال کرنے سے

$$\text{ا}\,\text{لاَ}^{۴} + ۴\,\text{ع}_{۱}\,\text{لاَ}^{۳} + ۶\,\text{ع}_{۲}\,\text{لاَ}^{۲} + ۴\,\text{ع}_{۳}\,\text{لاَ} + \text{ع}_{۴} = ۰$$

لاَ اور س کے لئے ایسی قیمتیں فرض کیجا سکتی ہیں کہ وہ دو مساواتوں

$$\text{ا}\,\text{لاَ}^{۴} + ۶\,\text{ع}_{۲}\,\text{لاَ}^{۲} + \text{ع}_{۴} = ۰،\quad \text{ع}_{۱}\,\text{لاَ}^{۲} + \text{ع}_{۳} = ۰$$

کو پورا کریں جن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ س کی کسی قیمت کے جواب میں لاَ کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ہیں اور جب، لاَ^۲ کو ساقط کیا جاتا ہے تو س کے لئے ہمیں چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے۔ س اور لاَ کی قیمتوں کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں حاصل کرنے کے لئے فرض کرو

$$\text{ی}_1 + \text{لا}_1' = \text{عہ} ،\quad \text{ی}_1 - \text{لا}_1' = \text{بہ} ،\quad \text{جنسے}\quad ۲\,\text{ی}_1 = \text{عہ} + \text{بہ} ،\quad ۲\,\text{لا}_1' = \text{عہ} - \text{بہ}$$

اسلئے لا' میں وہ مساوات جو ی کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے نیم فرقونکی مساوات ہے اور ی میں چھٹے درجہ کی مساوات نیم مجموعوں کی مساوات ہے۔ دفعہ ۶۵ کے طریقہ تحویل سے موخرالذکر مساوات کو فوراً شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے:۔

$$۴\,\text{ع}_۲^۲ - \text{ع}\,\text{ع}_۲ + \text{ج} = ۰ \qquad \text{(مثال ۲۱ سے مقابلہ کرو)}$$

چار درجی کو حل کرنیکے لئے اس آخری مساوات سے حاصل ہوتا ہے $\text{ع}_۲ = \text{ا}\,\text{ط}$ جہاں ط محول کعبی کی ایک اصل ہے۔ پس

$$\text{ع}_1 = \text{ای} + \text{ب} = \sqrt{\text{ا}^۲\text{ط} - \text{ھ}} ،\quad \text{لا}'' = -\frac{\text{ع}_۳}{\text{ع}_1} = -\frac{1}{۲\text{ا}}\left(\text{ع}_1^۲ + ۳\text{ھ} + \frac{\text{گ}}{\text{ع}_1}\right)$$

جس سے بالآخر

$$\text{الا} + \text{ب} = \text{ع}_1 + \text{الا}' = \sqrt{\text{ا}^۲\text{ط} - \text{ھ}} + \sqrt{-\text{ا}^۲\text{ط} - ۲\text{ھ} - \frac{\text{گ}}{\sqrt{\text{ا}^۲\text{ط} - \text{ھ}}}}$$

جو ایک ایسا جملہ ہے جسکی صرف چار قیمتیں ہیں اور جسمیں چار درجی کی اصل محول کعبی کی ایک واحد اصل کی رقوم میں بیان ہوئی ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی کعبی مساوات کی ایک اصل ط کا ہر منطق جبری تفاعل عام طور پر شکل

$$\frac{\text{ج}_۰ + \text{ج}_1\,\text{ط}}{\text{د}_۰ + \text{د}_1\,\text{ط}}$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل $\frac{\text{فہ}(\text{ط})}{\text{پہ}(\text{ط})}$ ہے جہاں فہ (ط) اور پہ (ط) ط کے کسی درجہ کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ دئے ہوئے کعبی کو متواتر تحویل کرنے سے انمیں سے ہر ایک تفاعل دو درجی تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس دیا ہوا تفاعل

شکل

$$\frac{ج_0 + ج_1 ط + ج_2 ط^2}{د_0 + د_1 ط + د_2 ط^2}$$

میں تحویل ہو سکتا ہے۔ اس کو مندرجۂ بالا شکل کے مساوی رکھنے سے اور دئے ہوئے کعبی سے تحویل کرنے سے ہمیں ایک متماثلہ مساوات یعنے $ل_0 + ل_1 ط + ل_2 ط^2 \equiv 0$ ملیگی جہاں $ل_0$، $ل_1$، $ل_2$ خطی تفاعل ہیں $ج_0$، $ج_1$، $د_0$، $د_1$ کے۔ اس لئے $ل_0 = 0$، $ل_1 = 0$، $ل_2 = 0$ اور ان سے $ج_0$، $ج_1$، $د_0$، $د_1$ کی نسبتیں ملتی ہیں۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ چار درجی مساوات کے حل میں جذر الکعب نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی جب اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ کے درمیان کوئی ایسا ربط موجود ہو جو محول کعبی کی اصل ط کے ایک منطق تفاعل کو صفر کے مساوی رکھنے سے بیان ہو سکے۔ (153)
ط کے کسی منطق تفاعل کو ہمیشہ درجہ دوم کے تفاعل میں گھٹایا جا سکتا ہے جیساکہ مثال ماسبق میں کیا گیا۔ پس ط کو معلوم کرنے میں جذر الکعب نکالنے کی ضرورت نہیں پڑیگی اور مثال ۲۶ کے ضابطہ سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں چار درجی کی اصل کے جملہ میں کوئی جذر الکعب شامل نہیں ہوتا۔

۲۹ ۔ جب مساوات

$$۴ س^3 - ع س + جے = 0$$

س کی حسب ذیل قیمتوں میں سے کسی سے پوری ہو

(۱) $\frac{ھ}{ا}$، (۲) ج، (۳) صفر، (۴) $\frac{\sqrt{اس - ج}}{۲}$، (۵) $\sqrt[3]{\frac{- جے}{۴}}$،

(۶) $\sqrt{\frac{ع}{۱۲}}$، (۷) $\frac{۳ جے}{۲ ع}$، (۸) $\frac{ا د - ب ج}{۲ ب}$

تو ہر صورت میں وہ ربط معلوم کرو جو چار درجی کی اصلوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

جوابات:۔ (۱) یہ + جہ - عہ - ضہ = ۰، (۲) یہ + جہ = ۰

(۳) (جہ - عہ) (یہ - ضہ) - (عہ - یہ) (جہ - ضہ) = ۰،

(۴)، (۸) یہ جہ - عہ ضہ = ۰، (۵) (جہ - عہ) (یہ - ضہ) - ۳ (عہ - یہ) (جہ - ضہ) =

(۶)، (۷) بہ - جہ = ۰

۳۰ — یہ متماثلہ ثابت کرو

$$\text{ا}^{6}(\text{ع}^{3} - 27\,\text{جے}^{2}) \equiv (\text{ا}^{2}\text{ع} - 3\,\text{ھ}^{2})(\text{ا}^{2}\text{ع} - 12\,\text{ھ}^{2})^{2} + 27\,\text{گ}^{2}(\text{گ}^{2} + 2\,\text{ا}^{3}\text{جے})$$

اسکو اس طرح ثابت کیا جا سکتا ہے :- ع اور جے کی قیمتوں میں $\text{ا}_{1}$ = ۰ رکھنے سے اور پھیلانے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ∆ کا وہ حصہ جسمیں $\text{ا}_{1}$ نہیں آتا شکل

$$\text{ا}_{0}\text{ا}_{4}(\text{ا}_{0}\text{ا}_{4} - 9\,\text{ا}_{2}^{2})^{2} + 27\,\text{ا}_{0}\text{ا}_{4}^{2}(2\,\text{ا}_{0}\text{ا}_{2}\text{ا}_{4} - \text{ا}_{0}\text{ا}_{4}^{2} - 2\,\text{ا}_{2}^{3})$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔

اب $\text{ا}_{2}$، $\text{ا}_{3}$، $\text{ا}_{4}$ کی جگہ $\text{ا}_{2}$، $\text{ا}_{3}$، $\text{ا}_{4}$ رکھنے سے اور ان مقداروں کی بجائے دفعہ ۲۰ کی قیمتیں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے ۔

۳۱ — جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یولر کے کعبی کی دو اصلیں مساوی ہوتی ہیں جنکی مشترک قیمت

$$\frac{3\,\text{ا}\,\text{جے} - 2\,\text{ھ}\,\text{ع}}{2\,\text{ع}}$$

ہے اور پھر یہ ثابت کرو کہ اس صورت میں چار درجی کی باقی دو اصلیں حقیقی ہیں یا مساوی یا خیالی بموجب اسکے کہ ۲ ھ ع - ۳ ا جے منفی ہو یا صفر یا مثبت

۳۲ — ثابت کرو کہ (۱) جب چار درجی کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو مربع دار فرقوں کی مساوات کی آخری دو رقمیں (دفعہ ۶۷) معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ∆ = ۰، ۲ ھ ع - ۳ ا جے = ۰ حاصل ہوتی ہیں اور یہ کہ (۲) جب اسکی تین اصلیں مساوی ہوں تو اس مساوات کی آخری تین رقمیں معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ع = ۰، جے = ۰ حاصل ہوتی ہیں ۔

قبل الذکر صورت میں بتاؤ کہ یہ شرطیں اُن شرطوں کے ساتھ مماثلت رکھتی ہیں جو مثال ۴ دفعہ ۶۱ اور مثال ۱۲ صفحہ (۲۱۷) میں حاصل ہوئی ہیں - نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مربع دار فرقوں کی مساوات قبل الذکر صورت میں فہ$^{2}$ (ا$^{2}$ فہ + ۱۲ ھ)$^{2}$ میں اور موخر الذکر صورت میں فہ$^{3}$ (ا$^{2}$ فہ + ۱۶ ھ)$^{2}$ میں تحویل ہوتی ہے -

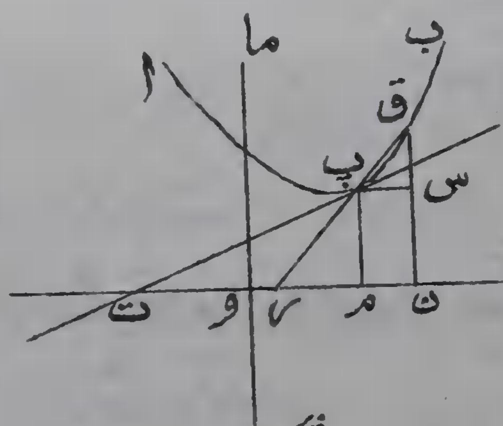
(154)

# ساتواں باب

## مشتق تفاعلوں کے خواص

### ۶۹ ـ مشتق تفاعل کی ترسیمی تعبیر

فرض کرو کہ کثیر الارقام ف (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی ا پ ب ہے اور اس پر پ وہ نقطہ ہے جو متغیر لا = و م کی کسی قیمت کے جواب میں ملتا ہے۔ اب ہم نقطہ پ پر فَ (لا) کی قیمت تعبیر کرنیکا طریقہ معلوم کرینگے۔ منحنی پر دوسرا نقطہ ق لو جو لا کی ایسی قیمت کے جواب میں ہو جو و م سے بقدر ایک چھوٹی مقدار ہ کے بڑی ہو۔ اس طرح




شکل (۵

و م = لا، م ن = ہ، و ن = لا + ہ

نیز پ م = ف (لا)، ق ن = ف (لا + ہ)

دفعہ ۶ کے پھیلاؤ کی رو سے

ف (لا + ہ) = ف (لا) + فَ (لا) ہ + فً (لا) / ۱ × ۲ ہ² + ........

یعنی [ف (لا + ہ) - ف (لا)] / ہ = فَ (لا) + [فً (لا) / ۱ × ۲] ہ + ........ (۱)

لیکن [ف (لا + ہ) - ف (لا)] / ہ = ق س / م ن = ق س / پ س

= مس ق پ س = مس پ ر ن

اب اگر ہ کو غیر محدود گھٹا دیا جائے تو ق، پ کے نزدیک آتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے، وتر پ ق، نقطہ پ پر منحنی کا مماس بنجاتا (155)
ہے، زاویہ پ ر ن، پ ت م ہو جاتا ہے۔ نیز مساوات (۱) کی دائیں جانب کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے غیر محدود گھٹ جاتی ہیں اور بالآخر ہ = ۰ کے لئے معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

مس پ ت م = فَ (لا)

جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ لا کی کسی قیمت کو درج کرنے سے مشتق تفاعل فَ (لا) جو قیمت اختیار کرتا ہے وہ اُس زاویہ کے مماس سے تعبیر ہوتی ہے جو تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کے متناظر نقطہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

**۷۰ ــ کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔** لا کی کوئی قیمت جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بنا دے مشتق مساوات فَ (لا) = ۰ کی ایک اصل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ لا کو قیمت ع دینے سے ف (لا) اقل ہوتا ہے۔ ہم ثابت کرینگے کہ فَ (لا) = ۰۔ فرض کرو کہ ہ سے لا کا چھوٹا اضافہ یا چھوٹا گھٹاؤ تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ ف (ع) اقل ہے اسلئے

ف (عہ) < ف (عہ + ہ)، نیز ف (عہ) < ف (عہ - ہ)

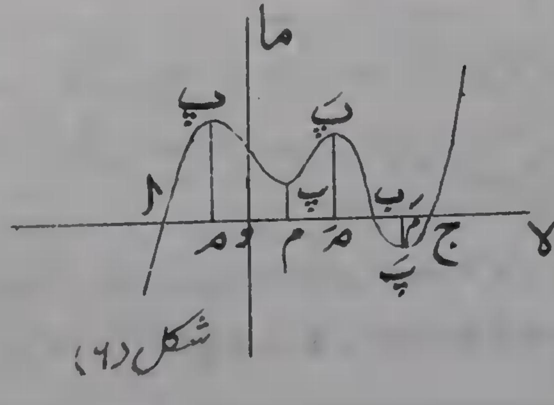
پس ف (عہ + ہ) - ف (عہ) اور ف (عہ - ہ) - ف (عہ) دونوں مثبت ہیں یعنی ذیل کے دو جملے مثبت ہیں :-

$$\text{فَ (عہ) ہ} + \frac{\text{فً (عہ)}}{1 \times 2} \text{ہ}^2 + \ldots\ldots،$$

$$- \text{فَ (عہ) ہ} + \frac{\text{فً (عہ)}}{1 \times 2} \text{ہ}^2 - \ldots\ldots$$

اب ہم یہ جانتے ہیں کہ جب، ہ بہت چھوٹا ہو تو اِن جملوں کی علامتیں وہی ہوتی ہیں جو اِنکی پہلی رقموں کی ہیں۔ پس دونوں جملوں کو مثبت ہونیکے لئے فَ (عہ) کو معدوم ہونا چاہئے اور علاوہ ازیں فً (عہ) کو مثبت ہونا چاہئے بالکل اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ جب، ف (عہ) اعظم ہو تو فَ (عہ) = ۰ اور فً (عہ) کو منفی ہونا چاہئے۔ اسلئے کثیر الارقام ف (لا) کی اعظم اور اقل قیمتوں کو معلوم کرنیکے لئے مساوات فَ (لا) = ۰ کو حل کرکے اسکی اصلوں کو ف (لا) میں درج کرنا چاہئے۔ ہر اصل سے ایک اعظم یا اقل قیمت ملیگی اور اعظم یا اقل قیمت کا امتیاز فً (لا) کی علامت سے ہوگا جب اسمیں لا کی بجائے وہ اصل درج کیجائے چنانچہ جب، فً (لا) منفی ہو تو قیمت اعظم ہوگی اور جب، فً (لا) مثبت ہو تو قیمت اقل۔

(156) اس دفعہ کا مسئلہ دفعہ ٦٩ کے عمل سے فوراً حاصل ہوتا ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب، ف (لا) کی قیمت اعظم ہو جیسے پ، پَ




شکل (٦)

(شکل ۶) پر یا اقل ہو جیسے پ، پَ پر تو منحنی کا مماس محور و لا کے متوازی ہوگا اور اس لئے

مس چ با ت م = فَ (لا) = ۰

شکل ۶ پانچویں درجہ کے کثیرالارقام کو تعبیر کرتی ہے۔ فَ (لا) = ۰ کی چار اصلوں کے جواب میں (جنکا حقیقی ہونا اس صورت میں فرض کرلیا گیا ہے) یعنی و مِ، و م، و مَ، و مَ کے جواب میں دو اعظم قیمتیں م پ، م پَ اور دو اقل قیمتیں م پ، مَ پَ ہیں۔

# مثالیں

۱ــ ف (لا) ≡ ۲ لا$^{۲}$ + لا − ۶

کی اعظم یا اقل قیمت معلوم کرو۔

فَ (لا) = ۴ لا + ۱، فً (لا) = ۴

لا = − $\frac{۱}{۴}$ سے ف (لا) = $\frac{-۴۹}{۸}$ اور یہ اقل قیمت ہے۔

(دیکھو شکل ۲ صفحہ ۲۰)

۲ــ ف (لا) ≡ ۲ لا$^{۳}$ − ۳ لا$^{۲}$ − ۳۶ لا + ۱۴

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) = ۶ (لا$^{۲}$ − لا − ۶)، فً (لا) = ۶ (۲ لا − ۱)،

لا = − ۲ سے ف (لا) = ۶۸ جو اعظم قیمت ہے۔

لا = ۳ سے ف (لا) = − ۶۷ جو اقل قیمت ہے۔

۳ــ ف (لا) ≡ ۳ لا$^{۴}$ − ۱۶ لا$^{۳}$ + ۶ لا$^{۲}$ − ۴۸ لا + ۷

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

یہاں فَ (لا) = ۰ کی صرف ایک حقیقی اصل ہے لا = ۴، اور اس سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے ف (لا) = − ۳۴۵ ۔

۴ــ ف (لا) ≡ ۱۰ لا$^{۳}$ − ۱۷ لا$^{۲}$ + لا + ۶

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) کی اصلیں تقریبی طور پر ۲۔۳۰۵، ۱۔۳۱۱ ہیں۔ پہلی اصل سے اعظم قیمت اور دوسری سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۴ صفحہ ۲۱)۔

**۱۷۔ رول کا مسئلہ۔ مساوات ف (لا) = ۰ کی دو متصلہ حقیقی اصلوں ا اور ب کے درمیان مساوات فَ (لا) = ۰ کی کم از کم ایک حقیقی اصل واقع ہوتی ہے۔**

چونکہ ف (لا) کو مسلسل تفاعل مان لیا گیا ہے اسلئے جب 'لا' ا سے ب تک بڑھتا ہے تو ف (ا) سے ف (ب) تک جانے میں ف (لا) کو ابتدا بڑھنا اور پھر گھٹنا چاہیئے یا ابتداً گھٹنا اور پھر بڑھنا چاہیئے۔ اسی لئے ف (ا) سے ف (ب) تک جانے میں اس کو کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت میں سے گذرنا چاہیئے۔ یہ قیمت (فرض کرو ف (ع)) ا اور ب کے درمیان لا کی کسی قیمت ع کے جواب میں ہوگی جو دفعہ ۰۷ کے مسئلہ سے مساوات فَ (لا) = ۰ کی ایک اصل ہے۔

دفعہ ماسبق کی شکل سے اس مسئلہ کی توضیح ہوتی ہے۔ ہم اس شکل میں دیکھتے ہیں کہ دو نقاط تقاطع ا اور ب کے درمیان تین اعظم یا اقل قیمتیں ہیں اور دو نقطوں ب اور ج کے درمیان ایسی صرف ایک قیمت ہے۔ شکل سے یہ بھی ظاہر ہے کہ دو متصلہ نقاط تقاطع کے درمیان ایسی قیمتوں کی تعداد طاق ہوتی ہے۔

**نتیجہ صریح۔ مشتق مساوات کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان ابتدائی مساوات کی کسی اصل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور کسی صورت میں بھی انکے درمیان ابتدائی مساوات کی ایک سے زیادہ اصل نہیں ہو سکتی۔**

اس مسئلہ کے پہلے حصہ سے صرف اس امر کی وضاحت ہوتی ہے کہ

ایک کثیر الارقام کی دو متصلہ صفر قیمتوں کے درمیان متعدد اعظم اور اقل قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ اس کا دوسرا حصہ مسئلہ بالا سے فوراً اخذ ہوسکتا ہے کیونکہ اگر $\text{ف}'(\text{لا}) = 0$ کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں تو $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی دو اصلیں ایسی ہونگی جن کے درمیان $\text{ف}'(\text{لا}) = 0$ کی کوئی اصل نہیں ہوگی اور یہ رول کے مسئلہ کے خلاف ہے۔

۲۷ ۔ **مشتق تفاعلوں کی ترکیب** ۔ فرض کرو کہ مساوات $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی اصلیں $\text{عہ}_1$، $\text{عہ}_2$، $\text{عہ}_3$ ..... $\text{عہ}_{\text{ن}}$ ہیں تو

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_2)\ldots\ldots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}})$$

اس متماثلہ میں لا کی بجائے ما + لا درج کرو تو

$$\text{ف}(\text{ما} + \text{لا}) = (\text{ما} + \text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{ما} + \text{لا} - \text{عہ}_2)\ldots\ldots(\text{ما} + \text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}})$$

$$= \text{ما}^{\text{ن}} + \text{ق}_1 \text{ما}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2 \text{ما}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ق}_{\text{ن}-1} \text{ما} + \text{ق}_{\text{ن}}$$

جہاں (158)

$$\text{ق}_1 = \text{لا} - \text{عہ}_1 + \text{لا} - \text{عہ}_2 + \text{لا} - \text{عہ}_3 + \ldots\ldots + \text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}}،$$

$$\text{ق}_2 = (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_2) + (\text{لا} - \text{عہ}_3)(\text{لا} - \text{عہ}_1) + \ldots\ldots + (\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}-1})(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}})،$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{ق}_{\text{ن}-1} = (\text{لا} - \text{عہ}_2)(\text{لا} - \text{عہ}_3)\ldots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}}) + (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_3)\ldots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}}) + \ldots$$

$$+ (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_2)\ldots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}-1})$$

$$\text{ق}_{\text{ن}} = (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_2)\ldots\ldots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}})$$

لیکن

$$\text{ف}(\text{ما} + \text{لا}) = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ف}'(\text{لا})\,\text{ما} + \frac{\text{ف}''(\text{لا})}{2 \times 1}\,\text{ما}^2 + \ldots\ldots + \text{ما}^{\text{ن}}$$

اسلئے

ف (لا) = قن = (لا - عہ$_{۱}$)(لا - عہ$_{۲}$)....(لا - عہ$_{ن}$)

فَ(لا) = ق$_{ن-۱}$ = (لا - عہ$_{۲}$)(لا - عہ$_{۳}$)....(لا - عہ$_{ن}$) +... جیسا اوپر لکھا گیا ہے۔

فً(لا) / (۲ × ۱) = ق$_{ن-۲}$ = ق'$_{ن-۲}$ کی وہ قیمت جو لا اور اصلوں کی رقوم میں اوپر درج ہے۔

فَ (لا) کی قیمت کو آسانی کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے:-

فَ (لا) = ف (لا) / (لا - عہ$_{۱}$) + ف (لا) / (لا - عہ$_{۲}$) + ........ + ف (لا) / (لا - عہ$_{ن}$)

**۳۷ — ضعفی اصلیں۔ مسئلہ:- اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک ضعفی اصل م ویں رتبہ کی ہو تو یہ اصل پہلی مشتق مساوات فَ (لا) = ۰ کی (م - ۱) ویں رتبہ والی ضعفی اصل ہو گی۔**

دفعہ ماسبق میں فَ (لا) کے لئے جو جملہ حاصل ہوا اس سے یہ مسئلہ فوراً حاصل ہوتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) میں جزو ضربی (لا - عہ$_{۱}$)$^{م}$ واقع ہو یعنی اگر عہ$_{۱}$ = عہ$_{۲}$ = عہ$_{۳}$ = ...... = عہ$_{م}$ تو

فَ (لا) = م ف(لا) / (لا - عہ$_{۱}$) + ف (لا) / (لا - عہ$_{م+۱}$) + .... + ف (لا) / (لا - عہ$_{ن}$)،

بائیں جملہ میں ہر رقم کا ایک جزو ضربی (لا - عہ$_{۱}$)$^{م}$ ہے سوائے پہلی رقم کے جسمیں (لا - عہ$_{۱}$)$^{م-۱}$ جزو ضربی کے طور پر ہے۔ پس (لا - عہ$_{۱}$)$^{م-۱}$، فَ (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔

**نتیجہ صریح ۱۔** کوئی اصل جو مساوات ف (لا) = ۰ میں م مرتبہ واقع ہوتی ہے پہلی مشتق مساوات میں (م - ۱) مرتبہ، دوسری میں (م - ۲) مرتبہ، ....، (م - ۱) ویں مشتق مساوات میں ایک مرتبہ واقع ہو گی۔

چونکہ $\text{ف}'(\text{لا})$ سے $\text{ف}''(\text{لا})$ اسی طرح حاصل ہوتا ہے جس طرح $\text{ف}(\text{لا})$ سے $\text{ف}'(\text{لا})$، اسلئے ابھی ثابت کئے ہوئے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ $\text{ف}''(\text{لا})$ میں $(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}-۲}$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا۔ تیسرے مشتق تفاعل $\text{ف}'''(\text{لا})$ میں $(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}-۳}$ شامل ہوگا اور علیٰ ہذا۔

**نتیجہ صریح ۲۔ اگر ف (لا) اور اسکے پہلے (م-۱) مشتق تفاعل سب کے سب لا کی قیمت عہ کے لئے معدوم ہوجائیں تو $(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}}$، ف (لا) کا جزو ضربی ہوگا۔**

یہ پچھلے نتیجہ صریح کا عکس ہے اور بلا واسطہ آسانی کے ساتھ یوں ثابت کیا جا سکتا ہے:۔ مشتق تفاعلوں کو $\text{ف}_۱(\text{لا})$، $\text{ف}_۲(\text{لا})$، ....، $\text{ف}_{\text{م}-۱}(\text{لا})$ سے تعبیر کرو (دیکھو دفعہ ۶) اور لا کی بجائے عہ + لا - عہ درج کرو تو ف (لا) کو شکل ذیل میں پھیلایا جا سکتا ہے:۔

$$\text{ف}(\text{عہ}) + \text{ف}_۱(\text{عہ})(\text{لا}-\text{عہ}) + \frac{\text{ف}_۲(\text{عہ})}{۱\times۲}(\text{لا}-\text{عہ})^۲ + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ف}_{\text{م}-۱}(\text{عہ})}{۱\times۲\times\cdots\times(\text{م}-۱)}(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}-۱} + \frac{\text{ف}_{\text{م}}(\text{عہ})}{۱\times۲\times\cdots\times\text{م}}(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ف}_{\text{ن}}(\text{عہ})}{۱\times۲\times\cdots\times\text{ن}}(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{ن}}$$

جس سے مسئلہ کی صداقت ظاہر ہے۔

**۴۷ ۔ ضعفی اصلوں کی تعیین۔** پچھلے دفعہ سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جا سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور $\text{ف}'(\text{لا})$ کا مشترک جزو ضربی $(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}-۱}$ ہو تو $(\text{لا}-\text{عہ})^{\text{م}}$، ف (لا) کا ایک جزو ہوگا۔ کیونکہ نتیجہ صریح (۱) کی رو سے

فَ (لا) کے بعد کے (م - ۳) مشتق تفاعل، ف (لا) اور فَ (لا) کے ساتھ معدوم ہوتے ہیں جبکہ لا = عہ - پس ف (لا) کی ایک اصل م رتبہ کی ہے - اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور فَ (لا) کے دوسرے مشترک اجزائے ضربی

$$(\text{لا} - \text{بہ})^{\text{ف}-1}، \quad (\text{لا} - \text{جہ})^{\text{ق}-1}، \quad (\text{لا} - \text{ضہ})^{\text{ر}-1}، \quad \text{وغیرہ}$$

ہوں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ف اصلیں بہ کے مساوی ہونگی، ق اصلیں جہ کے مساوی، ر اصلیں ضہ کے مساوی، وغیرہ۔

اسلئے یہ معلوم کرنیکے لئے کہ کسی مجوزہ مساوات کی ضعفی اصلیں موجود ہیں یا نہیں اور اگر موجود ہیں تو انکی تعیین کے لئے ہیں ف (لا) اور فَ (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیئے۔ فرض کرو یہ فہ (لا) ہے تو مساوی اصلونکی تعیین مساوات فہ (لا) = ۰ کے حل پر منحصر ہوگی۔

# مثالیں

۱- مساوات

$$\text{لا}^3 + \text{لا}^2 - 16\,\text{لا} + 20 = 0$$

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - ۲ ہے - پس $(\text{لا} - 2)^2$، ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے - دوسرا جزو لا + ۵ ہے -

ف (لا) کے ضعفی اجزائے ضربی کو معلوم کرنیکے بعد اگر باقی اجزائے ضربی حاصل کرنا ہو تو دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ متواتر استعمال کرنا سہولت بخش ہوگا - مثلاً یہاں ہم لا - ۲ سے دو مرتبہ تقسیم کرتے ہیں، عمل حساب کا طریقہ ذیل میں درج ہے :-

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱۶- | ۲۰ |
| | ۲ | ۶ | ۲۰- |
| ۱ | ۳ | ۱۰- | ۰ |
| | ۲ | ۱۰ | |
| ۱ | ۵ | ۰ | |

اس طرح دوسرا ا اور ۵ باقی رہ جاتے ہیں یعنے تیسرا جزو ضربی لا + ۵ ہے۔ اس عمل سے گذشتہ نتیجہ کی تصدیق ہوتی ہے کہ ہر تقسیم کے بعد باقی معدوم ہوتے ہیں جیساکہ ہونا چاہئے۔

۲ — مساوات

$$\text{لا}^5 - 10\,\text{لا}^2 + 15\,\text{لا} - 6 = 0$$

کی ضعفی اصلیں اور بقیہ جزو ضربی معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم $\text{لا}^2 - 2\,\text{لا} + 1$ ہے۔ پس $(\text{لا} - 1)^3$، ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ لا − ۱ سے تین مرتبہ متواتر تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - 1)^3 (\text{لا}^2 + 3\,\text{لا} + 6)$$

۳ — مساوات

$$\text{لا}^4 - 2\,\text{لا}^3 - 11\,\text{لا}^2 + 12\,\text{لا} + 36 = 0$$

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم $\text{لا}^2 - \text{لا} - 6$ ہے۔ اس کے اجزا لا + ۲ اور لا − ۳ ہیں۔ پس

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} + 2)^2 (\text{لا} - 3)^2$$

۴ — کثیر الارقام

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^6 - 5\,\text{لا}^5 + 5\,\text{لا}^4 + 9\,\text{لا}^3 - 14\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 8$$

کے تمام اجزائے ضربی معلوم کرو۔

**جواب :-** $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا} - 1)(\text{لا} + 1)^2 (\text{لا} - 2)^3$

کثیر الارقام اور اسکے پہلے مشتق کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنیکا معمولی عمل بہت
محنت طلب ہوتا جائیگا جیسے جیسے تفاعل کا درجہ بڑہتا جائیگا۔ اسلئے یہ کہنا (جیسا کہ مساواتوں کے نظریہ
کی اکثر کتابوں میں کہا جاتا ہے) غلط ہے کہ عددی مساواتوں کی ضعفی اصلوں کو معلوم کرنیکا (161)
یہ طریقہ سادہ طریقہ ہے اور یہ کہ وہ اصلوں کے متعلق مزید تحقیقات کے لئے ضروری ہے۔
اسٹرم (Sturm) کے مسئلہ کے سلسلہ میں اس طریقہ کی کچھ عملی قدر و قیمت
ہے — ہم ضعفی اصلوں کی بحث کو دسویں باب تک ملتوی کرتے ہیں جہاں اس مسئلہ پر

غور کیا جائیگا۔ نیز گیارھویں باب میں یہ بتایا جائیگا کہ چھٹے درجہ سے کم درجوں کی مساواتوں کی ضِعفی اصلیں، کسی مخصوص مثال میں، سادہ طریقوں سے معلوم ہو سکتی ہیں جنمیں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

۷۵ — اس دفعہ اور اگلے دفعہ میں وہ مسئلے بیان کئے جائینگے جو مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنیکے طریقوں کی آنیوالی بحث میں بہت اہم اور کار آمد ثابت ہونگے۔

**مسئلہ۔** مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصل عہ سے ذرا چھوٹی لا کی قیمت عہ - ہ سے ذرا بڑی قیمت عہ + ہ تک مسلسل گذرنے میں کثیر الارقام ف (لا) اور ف′ (لا) کی علامتیں اصل میں سے گذرنے سے عین پہلے مختلف ہوتی ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق۔

ف (لا) اور ف′ (لا) میں لا کی بجائے عہ - ہ درج کرنے سے اور اور پھیلانے سے

ف (عہ - ہ) = ف (عہ) - ف′ (عہ) ہ + (ف″ (عہ) / ۱ × ۲) ہ[۲] - ......

ف′ (عہ - ہ) = ف′ (عہ) - ف″ (عہ) ہ + ......

اب چونکہ ف (عہ) = ۰ اسلئے ان جملوں کی علامتیں انکی پہلی رقموں پر منحصر ہونیکی وجہ سے مختلف ہیں۔ اگر ہ کی علامت بدلدیجائے تو ان جملوں کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہوگیا۔

**نتیجہ صریح۔** مسئلہ بالا درست رہتا ہے جب 'عہ' مساوات ف (لا) = ۰ کی کسی رتبہ کی ضِعفی اصل ہو۔

فرض کرو کہ اصل ر مرتبہ تکرار پاتی ہے تو ذیل کے تفاعل (جنمیں زبر کی بجائے لاحقے استعمال ہوئے ہیں) سب کے سب معدوم ہوتے ہیں:-

ف (عہ)، ف[۱] (عہ)، ف[۲] (عہ)، ......، ف[ر-۱] (عہ)

ف (عہ - ہ) اور $\text{ف}'$ (عہ - ہ) کے سلسلوں میں وہ پہلی رقمیں جو (162)
معدوم نہیں ہوتیں یہ ہیں

$$\frac{\text{ف}_{\text{ر}}(\text{عہ})}{۱\times۲\times\dots\times\text{ر}}(-\text{ہ})^{\text{ر}} ، \quad \frac{\text{ف}_{\text{ر}}(\text{عہ})}{۱\times۲\times۳\times\dots\times(\text{ر}-۱)}(-\text{ہ})^{\text{ر}-۱}$$

ظاہر ہے کہ انکی علامتیں مختلف ہیں، لیکن جب ہ کی علامت کو تبدیل کیا جاتا ہے تو اِن رقموں کی علامتیں وہی ہو جاتی ہیں - پس مسئلہ درست ہے۔

۶۷ — سلسلہ

$$\text{ف}(\text{لا})،\ \text{ف}_۱(\text{لا})،\ \text{ف}_۲(\text{لا})،\ \dots،\ \text{ف}_{\text{ر}-۱}(\text{لا})$$

کے ہر دو متصلہ تفاعلوں پر دفعہ ماسبق کا استدلال جاری کیا جائے تو مسئلہ کو عام صورت میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے :-

مسئلہ - جب کسی مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ر رتبہ کی ہو اور عہ سے ذرا کم قیمت لا کو دیجائے تو اِس سلسلہ کے ر تفاعلوں کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی یا منفی اور مثبت ہونگی لیکن عہ سے ذرا بڑی قیمت لا کو دیجائے تو یہ سب تفاعل ہم علامت ہونگے اور مزید برین یہ علامت وہی ہوگی جو $\text{ف}_{\text{ر}}$ (عہ) کی ہے یعنی اُس پہلے تفاعل کی جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا۔

اس مسئلہ کے استعمال کو پوری طرح ذہن نشین کرنے کے لئے فرض کرو کہ $\text{ف}_۵$ (عہ) وہ پہلا تفاعل ہے جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا اور فرض کرو کہ اسکی علامت منفی ہے - اس مسئلہ سے جو نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے وہ یہ ہے کہ لا کی قیمت عہ - ہ کے لئے تفاعلوں کے سلسلہ ف، $\text{ف}_۱$، $\text{ف}_۲$، $\text{ف}_۳$، $\text{ف}_۴$ کی علامتیں ہیں

− + − + − − +

اور لا کی قیمت ع + ہ کے لئے اُنکی علامتیں ہیں

− − − − − − −

کیونکہ اصل میں سے گذرنے سے پہلے ف ہی علامت ف$_{ہ}$ کی علامت سے مختلف ہونی چاہئے، ف$_{۲}$ کی علامت ف$_{ہ}$ سے مختلف ہونی چاہئے اور علیٰ ہذا۔ اور اصل میں سے گذرنیکے بعد سب تفاعلوں کی علامتیں وہی ہونی چاہیں۔ یہاں ہم نے فی الحقیقت یہ تسلیم کیا ہے کہ ہ اسقدر چھوٹا ہے کہ ف$_{ہ}$ (لا) = ۰ کی کوئی اصل اس وقفہ کے اندر داخل نہیں ہوتی جسمیں سے لا گذرتا ہے۔

(163)

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف\,(لا) \equiv لا^{۴} + ۱۲\,لا^{۳} + ۳۲\,لا^{۲} - ۲۴\,لا + ۴ = ۰$$

کی ضِعفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- $ف\,(لا) \equiv (لا^{۲} + ۶\,لا - ۲)^{۲}$

۲۔ ثابت کرو کہ ثنائی مساوات

$$لا^{ن} - ر^{ن} = ۰$$

میں مساوی اصلیں نہیں ہوسکتیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{ن} - ن\,ق\,لا + (ن - ۱)\,ر = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$ق^{ن} = ر^{ن-۱}$$

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

لا^۵ + ۵ ف لا^۳ + ۵ ف^۲ لا + ق = ۰

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر ق^۲ + ۴ ف^۵ = ۰ ۔ اور یہ کہ اگر مساوی اصلوں کا ایک زوج موجود ہو تو مساوی اصلوں کا ایک دوسرا زوج بھی موجود ہوتا چاہیئے ۔

۵ — دفعہ ۴۷ کا طریقہ استعمال کرکے وہ شرط معلوم کرو کہ کعبی مساوات

ی^۳ + ۳ ھ ی + گ = ۰

کی دو اصلیں مساوی ہوں ۔

مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنیکے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہو جانا چاہیئے ۔

جواب :- گ^۲ + ۴ ھ^۳ = ۰

۶ — اسی طریقہ کو استعمال کرکے بتاؤ کہ گ اور ھ دونوں معدوم ہوتے ہیں جب کعبی کی تین اصلیں مساوی ہوں ۔

۷ — اگر چار درجی ف (لا) = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ

ف' (عہ) + ف' (بہ) + ف' (جہ) + ف' (ضہ)

کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ۔

جواب :- (عہ + بہ − جہ − ضہ) (عہ + جہ − بہ − ضہ)
(عہ + ضہ − بہ − جہ)

۸ — اگر ف (لا) = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ، وغیرہ ہوں اور ف' (لا) = ۰ کی اصلیں عہ'، بہ'، جہ'، ضہ'، وغیرہ تو ثابت کرو کہ

ف' (عہ) ف' (بہ) ف' (جہ) ف' (ضہ) ..... = ن^ن ف (عہ') ف (بہ') ف (جہ') .....

اور یہ کہ ہر ایک اس مساوات کی رقم مطلق کے مساوی ہے جسکی اصلیں فرقونکے مربع ہیں ۔

۹ — اگر مساوات

لا^ن + ف_۱ لا^(ن−۱) + ف_۲ لا^(ن−۲) + ..... + ف_(ن−۱) لا + ف_ن = ۰

کی ایک دوہری اصل عہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ، مساوات

ف_۱ لا^(ن−۱) + ۲ ف_۲ لا^(ن−۲) + ۳ ف_۳ لا^(ن−۳) + ..... + ن ف_ن = ۰

(64) کی ایک اصل ہے۔

۱۰۔ بتاؤ کہ کعبی

ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

ا^۲ ر^۲ − ۲ گ ر + ∆ = ۰

کی اصلیں ہیں جہاں ∆ ممیز ہے۔

ف (لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کو اگر محور یا کے متوازی، (دیکھو دفعہ ۱۰) اعظم یا اقل قیمت ر کے مساوی فاصلے میں سے حرکت دیجائے تو محور لا منحنی کا مماس ہو جائیگا یعنی مساوات ف (لا) − ر = ۰ مساوی اصلیں رکھے گی۔ پس اعظم اور اقل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ف (لا) − ر کا ممیز بنانے سے یا گ^۲ + ۴ ھ^۳ = ۰ میں د کی بجائے د − ر رکھنے سے۔

۱۱۔ اسی طرح ثابت کرو کہ

ا لا^۴ + ۴ ب لا^۳ + ۶ ج لا^۲ + ۴ د لا + س

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

ا^۳ ر^۳ − ۳ (ا^۲ ع − ۹ ھ^۲) ر^۲ + ۳ (ا ع^۲ − ۱۸ ھ ج) ر − ∆ = ۰

کی اصلیں ہیں جہاں ∆ چار درجی کا ممیز ہے۔

۱۲۔ تفاعل

ف (لا) ≡ لا^۴ − ۷ لا^۳ + ۱۵ لا^۲ − ۱۳ لا + ۴

پر دفعہ ۶۷ کا مسئلہ استعمال کرو۔

یہاں

ف~۱~ (لا) = ۴ لا^۳ − ۲۱ لا^۲ + ۳۰ لا − ۱۳،

ف~۲~ (لا) = ۲ (۶ لا^۲ − ۲۱ لا + ۱۵)،

ف~۳~ (لا) = ۲ (۱۲ لا − ۲۱)،

ف~۴~ (لا) = ۲۴

یہاں ف~۳~ (لا) پہلا تفاعل ہے جو معدوم نہیں ہوتا جبکہ لا = ۱، اور

ف$_{۳}$ (۱) منفی ہے۔ مسئلہ سے یہ ثابت ہے کہ ایک سے ذرا کم قیمت کے لئے ف، ف$_{۱}$، ف$_{۲}$، ف$_{۳}$ کی علامتیں ہیں + − + −، اور ایک سے ذرا بڑی قیمت کے لئے ان سب کی علامتیں منفی ہیں۔ علامتوں کے اِس سلسلہ سے ہم تفاعلوں ف، ف$_{۱}$، وغیرہ کو نقطہ لا = ۱ کے قرب میں مرتسم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ ف (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی ضعیفی نقطہ لا = ۱ تک پہنچنے سے قبل محور لا کے اوپر ہے اور پہنچنے کے عین بعد محور کے نیچے اور محور منحنی کو تین منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے کیونکہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی (لا − ۱)$^{۳}$ ہے۔ ف$_{۱}$ (لا) کو تعبیر کرنیوالا منحنی نقطہ لا = ۱ میں سے گذرنے سے پہلے اور بعد دونوں صورتوں میں محور کے اوپر ہوگا۔ وہ محور کو اِس نقطہ پر مس کریگا۔ ف$_{۲}$ (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی نقطہ میں سے گذرتے سے پہلے محور کے اوپر اور گذرنیکے بعد محور کے نیچے ہوگا اور محور کو اس نقطہ پر قطع کریگا۔

65)

# آٹھواں باب

## اصلوں کے متشاکل تفاعل

### ۷۷ ۔ نیوٹن کا مسئلہ ۔ اصلوں کی قوتوں کے مجموعے ۔

اب ہم مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی بحث کی طرف رجوع کرتے ہیں ۔ اِن کا کچھ ذکر پہلے (دفعہ ۲۰) میں آچکا ہے۔ یہاں ہم اِن تفاعلوں سے متعلق چند عام مسائل ثابت کرینگے ۔

**مسئلہ ۱ ۔ کسی مساوات کی اصلوں کی متشابہ قوتوں کے مجموعے سروں کے رقوم میں منطق طور پر بیان ہو سکتے ہیں ۔**

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots + \text{ب}_{\text{ن}}$$

$$\equiv (\text{لا} - \text{عہ}_1)(\text{لا} - \text{عہ}_2)\cdots(\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}}) = 0$$

اب ہم سروں $\text{ب}_1$، $\text{ب}_2$، ..... $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی رقوم میں $\Sigma\,\text{عہ}^2$، $\Sigma\,\text{عہ}^3$، ......، $\Sigma\,\text{عہ}^{\text{م}}$ کو یعنی عام ترقیم کے مطابق $\text{س}_1$، $\text{س}_2$، .....، $\text{س}_{\text{م}}$ کو محسوب کرینگے ۔

دفعہ ۲۷ کی رو سے

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{عہ}_1} + \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{عہ}_2} + \cdots\cdots + \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{لا} - \text{عہ}_{\text{ن}}}$$

$$\equiv ن\,لا^{ن-۱} + (ن-۱)\,ب_۱\,لا^{ن-۲} + (ن-۲)\,ب_۲\,لا^{ن-۳} + \cdots\cdots + ۲\,ب_{ن-۲}\,لا + ب_{ن-۱}$$

اور دفعہ ۸ کے طریقہ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{ف\,(لا)}{لا - عہ} = لا^{ن-۱} + عہ \;\Big|\; لا^{ن-۲} + عہ^۲ \;\Big|\; لا^{ن-۳} + عہ^۳ \;\Big|\; لا^{ن-۴} + \cdots + عہ^{ن-۱}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+ ب_۱$ | $+ ب_۱ عہ$ | $+ ب_۱ عہ^۲$ | $+ ب_۱ عہ^{ن-۲}$ |
| | $+ ب_۲$ | $+ ب_۲ عہ$ | $+ ب_۲ عہ^{ن-۳}$ (166) |
| | | $+ ب_۳$ | $+ \cdots\cdots$ |
| | | | $\cdots\cdots\cdots$ |
| | | | $+ ب_{ن-۲}\, عہ$ |
| | | | $+ ب_{ن-۱}$ |

اگر اس مساوات میں عہ کی بجائے مقداروں $عہ_۱$، $عہ_۲$، ....، $عہ_ن$ میں سے ہر ایک یکے بعد دیگرے رکھدیجائے اور اگر $س_ق = \Sigma\, عہ^ق = عہ_۱^ق + عہ_۲^ق + عہ_۳^ق + \cdots\cdots + عہ_ن^ق$ تو ان تمام نتیجوں کو جمع کرنے سے $فَ\,(لا)$ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہو گی:—

$$فَ(لا) = ن\,لا^{ن-۱} + س_۱ \;\Big|\; لا^{ن-۲} + س_۲ \;\Big|\; لا^{ن-۳} + س_۳ \;\Big|\; لا^{ن-۴} + \cdots + س_{ن-۱}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+ ن\,ب_۱$ | $+ ب_۱ س_۱$ | $+ ب_۱ س_۲$ | $+ ب_۱ س_{ن-۲}$ |
| | $+ ن\,ب_۲$ | $+ ب_۲ س_۱$ | $+ ب_۲ س_{ن-۳}$ |
| | | $+ ن\,ب_۳$ | $+ \cdots\cdots$ |
| | | | $\cdots\cdots\cdots$ |
| | | | $+ ب_{ن-۲}\, س_۱$ |
| | | | $+ ن\,ب_{ن-۱}$ |

اب فَ(لا) کی اِس قیمت کا مقابلہ اِسکی قبل الذکر قیمت کے ساتھ کیا جائے تو ہمیں ذیل کے ربط ملینگے:-

$$س_{۱} + ب_{۱} = ۰،$$
$$س_{۲} + ب_{۱} س_{۱} + ۲ ب_{۲} = ۰،$$
$$س_{۳} + ب_{۱} س_{۲} + ب_{۲} س_{۱} + ۳ ب_{۳} = ۰،$$
$$س_{۴} + ب_{۱} س_{۳} + ب_{۲} س_{۲} + ب_{۳} س_{۱} + ۴ ب_{۴} = ۰،$$

.......................................

$$س_{ن-۱} + ب_{۱} س_{ن-۲} + ب_{۲} س_{ن-۳} + \cdots\cdots + ب_{ن-۲} س_{۱} + (ن-۱) ب_{ن-۱} = ۰$$

پہلی مساوات سے $ب_{۱}$، $ب_{۲}$، $ب_{۳}$، ......، $ب_{ن}$ کی رقوم میں $س_{۱}$ معلوم ہوتا ہے، دوسری سے $س_{۲}$، تیسری سے $س_{۳}$، اور علیٰ ہذا القیاس یہانتک کہ $س_{ن-۱}$ معلوم ہوجاتا ہے۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں

$$س_{۱} = -ب_{۱}،\quad س_{۲} = ب_{۱}^{۲} - ۲ ب_{۲}،\quad س_{۳} = -ب_{۱}^{۳} + ۳ ب_{۱} ب_{۲} - ۳ ب_{۳}،$$
$$س_{۴} = ب_{۱}^{۴} - ۴ ب_{۱}^{۲} ب_{۲} + ۴ ب_{۱} ب_{۳} + ۲ ب_{۲}^{۲} - ۴ ب_{۴}،$$
$$س_{۵} = -ب_{۱}^{۵} + ۵ ب_{۱}^{۳} ب_{۲} - ۵ ب_{۱}^{۲} ب_{۳} - ۵ (ب_{۲}^{۲} - ب_{۴}) ب_{۱} + ۵ (ب_{۲} ب_{۳} - ب_{۵})،$$

.......................................

یہ بتانے کے بعد کہ $س_{۱}$، $س_{۲}$، $س_{۳}$، ......، $س_{ن-۱}$ کو کس طرح سروں کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے ہم اب اپنے نتیجوں کی ایسی توسیع کرتے ہیں کہ اس سے اصلوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعے معلوم کئے جاسکیں۔ اس (167) مقصد کے لئے فَ(لا) کو $لا^{م-ن}$ سے ضرب دو تو

$$لا^{م-ن} فَ(لا) \equiv لا^{م} + ب_{۱} لا^{م-۱} + ب_{۲} لا^{م-۲} + \cdots + ب_{ن} لا^{م-ن}،$$

اس متماثلہ میں لا کو یکے بعد دیگرے $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، ....، $ع_ن$ میں بدلکر جمع کیا جائے تو

$$س_م + ب_۱ س_{م-۱} + ب_۲ س_{م-۲} + \dots\dots + ب_ن س_{م-ن} = ۰$$

اب م کو یکے بعد دیگرے ن، ن + ۱، ن + ۲، ..... قیمتیں دینے سے اور $س_۰ = ن$ کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں اس آخری مساوات سے ذیل کے رابطے ملینگے:

$$س_ن + ب_۱ س_{ن-۱} + ب_۲ س_{ن-۲} + \dots\dots + ن ب_ن = ۰،$$

$$س_{ن+۱} + ب_۱ س_ن + ب_۲ س_{ن-۱} + \dots\dots + ب_ن س_۱ = ۰،$$

$$س_{ن+۲} + ب_۱ س_{ن+۱} + ب_۲ س_ن + \dots\dots + ب_ن س_۲ = ۰،$$

..................................

پس اصلوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعوں کو سروں کے منطق تفاعلوں سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ نیز دی ہوئی مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تحویل کرنے سے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، .... $ع_ن$ کے متکافی ہوں اور اوپر کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اصلوں کی تمام منفی قوتوں کو بھی اسی طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔

## ۷۸ ـ مسئلہ ۲ ـ کسی جبری مساوات کی اصلوں کے ہر منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے

اس مسئلہ کو صرف صحیح تفاعلوں کے لئے ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ کسری متشاکل تفاعلوں کو ایک واحد کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح متشاکل تفاعل ہوں ـ $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، ..... $ع_ن$ کا ہر صحیح تفاعل شکل $ن ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر} \dots$ کی رقموں کا مجموعہ ہوتا ہے

جہاں ن ایک عددی مستقل ہے، اور اگر یہ تفاعل متشاکل ہو تو ہم اس کو شکل $\Sigma\, ن\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق} ع_{۳}^{ر} \ldots$ یعنی $ن\, \Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق} ع_{۳}^{ر} \ldots$ میں لکھ سکتے ہیں کیونکہ تمام رقمیں ایک ہی نمونہ کی ہونگی۔ اسلئے اگر ہم یہ ثابت کر دیں کہ اس مقدار کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جا سکتا ہے تو مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔ پہلے ہم متشاکل تفاعل $\Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق}$ کی حسب ذیل قیمت ثابت کرینگے:-

$$\Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق} = س_{ف}\, س_{ق} - س_{ف+ق} \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

(68) اسکو ثابت کرنیکے لئے ہم $س_{ف}$ اور $س_{ق}$ کو باہم ضرب دیتے ہیں جہاں

$$س_{ف} = ع_{۱}^{ف} + ع_{۲}^{ف} + \ldots\ldots + ع_{ن}^{ف} ،$$

$$س_{ق} = ع_{۱}^{ق} + ع_{۲}^{ق} + ع_{۳}^{ق} + \ldots\ldots + ع_{ن}^{ق}$$

جس سے

$$س_{ف}\, س_{ق} = ع_{۱}^{ف+ق} + ع_{۲}^{ف+ق} + \ldots + ع_{ن}^{ف+ق} + ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق} + ع_{۱}^{ق} ع_{۲}^{ف} + ع_{۲}^{ق} ع_{۳}^{ف} + \ldots$$

یا
$$س_{ف}\, س_{ق} = س_{ف+ق} + \Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق}$$

جو دوہرے تفاعل $\Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق}$ کو واحد تفاعلوں $س_{ف}$، $س_{ق}$، $س_{ف+ق}$ کی رقوم میں مندرجہ بالا شکل میں بیان کرتا ہے۔

اب ہم تہرے تفاعل کے لئے اسی طرح کا جملہ ثابت کرتے ہیں یعنی

$$\Sigma\, ع_{۱}^{ف} ع_{۲}^{ق} ع_{۳}^{ر} = س_{ف}\, س_{ق}\, س_{ر} - س_{ق+ر}\, س_{ف} - س_{ر+ف}\, س_{ق} - س_{ف+ق}\, س_{ر} + ۲\, س_{ف+ق+ر} \qquad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق}$ اور $س_ر$ کو باہم ضرب دینے سے جہاں

$$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} = ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} + ع_۱^{ق} ع_۲^{ف} + ع_۱^{ف} ع_۳^{ق} + \dots\dots$$

$$س_ر = ع_۱^{ر} + ع_۲^{ر} + ع_۳^{ر} + \dots + ع_ن^{ر}،$$

ہمیں تین مختلف حصوں پر مشتمل ایک جملہ ملتا ہے یعنی شکل $\Sigma ع_۱^{ف+ر} ع_۲^{ق}$، $\Sigma ع_۱^{ق+ر} ع_۲^{ف}$، اور $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}$ کی رقمیں۔

پس

$$س_ر \Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} = \Sigma ع_۱^{ف+ر} ع_۲^{ق} + \Sigma ع_۱^{ق+ر} ع_۲^{ف} + \Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}،$$

جو ایسا ضابطہ ہے جو دوہرے اور تہرے متشاکل تفاعلوں کو ملاتا ہے۔
لیکن (۱) کی رو سے

$$\Sigma ع_۱^{ف+ر} ع_۲^{ق} = س_{ف+ر} س_ق - س_{ف+ق+ر}،$$

$$\Sigma ع_۱^{ق+ر} ع_۲^{ف} = س_{ق+ر} س_ف - س_{ف+ق+ر}،$$

$$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} = س_ف س_ق - س_{ف+ق}$$

اِن قیمتوں کو درج کرنے سے تہرا تفاعل $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}$ سلسلہ $س_۱، س_۲، س_۳، \dots$ کے واحد تفاعلوں کی رقوم میں مندرجۂ بالا طریقہ پر بیان ہو سکتا ہے۔

اسی طرح چوہرے تفاعل $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر} ع_۴^{س}$ کو تہرے تفاعل $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}$

(69) پر منحصر کیا جا سکتا ہے اور بالآخر $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، وغیرہ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔ یعنی آخر الامر اصلوں کا ہر منطق متشاکل تفاعل سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے کیونکہ مسئلہ اسے $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$، وغیرہ سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں جب قوت نماؤں میں سے چند قوت نما مساوی ہو جائیں تو ضابطوں (۱) اور (۲) میں ترمیم کرنی ہوگی۔

مثلاً اگر ف = ق تو $ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} \equiv ع_۲^{ف} ع_۱^{ق}$ اور (۱) کی رقمیں دو دو کر کے مساوی ہوتی ہیں اِس لئے $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} = ۲ \Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ف}$، جس سے

$$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ف} = \frac{۱}{۲} ( س_{ف}^{۲} - س_{۲ف} )$$

اسی طرح اگر $\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}$ میں ف = ق = ر تو وہ چھ رقمیں مساوی ہوتی ہیں جو $ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر}$ میں اصلوں کے تبادلہ سے حاصل ہوتی ہیں پس

$$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ف} ع_۳^{ف} = \frac{۱}{۳ \times ۲} ( س_{ف}^{۳} - ۳ س_{ف} س_{۲ف} + ۲ س_{۳ف} )،$$

عام صورت میں اگر ت قوت نما مساوی ہو جائیں تو ہر رقم $۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times$ ت مرتبہ تکرار پاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$\Sigma ع_۱^{ف} ع_۲^{ق} ع_۳^{ر} ع_۴^{ک} = س_{ف} س_{ق} س_{ر} س_{ک} - \Sigma س_{ف} س_{ق} س_{ر+ک}$$
$$+ ۲ \Sigma س_{ف} س_{ق+ر+ک} + \Sigma س_{ف+ق} س_{ر+ک} - ۶ س_{ف+ق+ر+ک}$$

۲ — ثابت کرو

$$۲۴ \sum ع_۱^م ع_۲^م ع_۳^م ع_۴^م = س_م^۴ - ۶ س_م^۲ س_{۲م} + ۸ س_م س_{۳م} + ۳ س_{۲م}^۲ - ۶ س_{۴م}$$

۹۷ — مسئلہ ۳ — سروں $ب_۱، ب_۲، ب_۳ \dots ب_ن$ کی رقوم میں بیان کردہ $س_ر$ کی قیمت، $ما^ر$ کا سر ہے جو جملہ $-ر$ لوک $ما^ن ف\left(\frac{۱}{ما}\right)$ کو ما کی صعودی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ

$$لا^ن + ب_۱ لا^{ن-۱} + ب_۲ لا^{ن-۲} + \dots + ب_ن \equiv (لا - ع_۱)(لا - ع_۲)\dots(لا - ع_ن)،$$

اس لئے اس میں لا کی بجائے $\frac{۱}{ما}$ رکھنے سے

$$۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما^۲ + \dots + ب_ن ما^ن \equiv (۱ - ع_۱ ما)(۱ - ع_۲ ما)\dots(۱ - ع_ن ما)$$

اب طرفین کا نیپیری لوکارتم لینے سے (170)

$$ب_۱ ما + \left(ب_۲ - \frac{۱}{۲} ب_۱^۲\right) ما^۲ + \left(ب_۳ - ب_۱ ب_۲ + \frac{۱}{۳} ب_۱^۳\right) ما^۳ + \left(ب_۴ - ب_۱ ب_۳ + \frac{۱}{۲} ب_۲^۲ + ب_۱^۲ ب_۲ - \frac{۱}{۴} ب_۱^۴\right) ما^۴ + \left(ب_۵ - ب_۲ ب_۳ + ب_۱ ب_۲^۲ + ب_۱^۲ ب_۳ - ب_۱ ب_۴ - ب_۱^۳ ب_۲ + \frac{۱}{۵} ب_۱^۵\right) ما^۵ + \dots + ب_ر ما^ر + \dots،$$

$$\equiv -\text{ما}\,\text{س}_1 - \frac{1}{2}\text{ما}^2\text{س}_2 - \frac{1}{3}\text{ما}^3\text{س}_3 - \dots\dots - \frac{1}{\text{ر}}\text{ما}^{\text{ر}}\text{س}_{\text{ر}} - \dots$$

اسلئے دونوں جملوں میں $\text{ما}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{س}_{\text{ر}} = -\text{ر}\,\text{ب}_{\text{ر}}$$

جہاں $\text{ب}_{\text{ر}}$، $\text{ما}^{\text{ر}}$ کا سر ہے لوک $\text{ما}^{\text{ن}}\,\text{ف}\left(\frac{1}{\text{ما}}\right)$ میں -

اوپر کی متماثلہ مساوات سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $\text{س}_{\text{ر}}$ میں $(\text{ر} \le \text{ن})$ صرف سر $\text{ب}_1$، $\text{ب}_2$، .....، $\text{ب}_{\text{ر}}$، شامل ہوتے ہیں اور اس لئے $\text{س}_{\text{ر}}$ کے جملہ کی شکل پر اثر پڑے بغیر $\text{ب}_{\text{ر}+1}$، $\text{ب}_{\text{ر}+2}$، .....، $\text{ب}_{\text{ن}}$ کو معدوم کیا جاسکتا ہے -

## ۸۰ - اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں سروں کو بیان کرنا -

چونکہ

$$1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \dots + \text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}} \equiv (1 - \text{ع}_1\text{ما})(1 - \text{ع}_2\text{ما})\dots(1 - \text{ع}_{\text{ن}}\text{ما})،$$

اسلئے

$$\text{لوک}\,(1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \dots \text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}}) \equiv -\text{ما}\,\text{س}_1 - \frac{1}{2}\text{ما}^2\text{س}_2 - \dots - \frac{1}{\text{ر}}\text{ما}^{\text{ر}}\text{س}_{\text{ر}} - \dots \quad (1)$$

اسلئے

$$1 + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ب}_2\text{ما}^2 + \dots \text{ب}_{\text{ن}}\text{ما}^{\text{ن}} = \text{ق}^{-\text{ما}\text{س}_1 - \frac{1}{2}\text{ما}^2\text{س}_2 - \frac{1}{3}\text{ما}^3\text{س}_3 - \dots}$$

(171) جو پھیلانے سے ہو جاتا ہے

$$1 - \text{س}_1\text{ما} + \left[-\frac{1}{2}\text{س}_2 + \frac{1}{2\times1}\text{س}_1^2\right]\text{ما}^2 + \left[-\frac{1}{3}\text{س}_3 + \frac{1}{2\times1}\text{س}_1\text{س}_2 - \frac{1}{3\times2\times1}\text{س}_1^3\right]\text{ما}^3 + \left[-\frac{1}{4}\text{س}_4 + \frac{1}{3}\text{س}_1\text{س}_3 - \frac{1}{2}\text{س}_1^2\text{س}_2 + \frac{1}{4\times2}\text{س}_2^2 + \frac{1}{4\times3\times2}\text{س}_1^4\right]\text{ما}^4 - \dots\dots$$

اب ما کی مختلف قوتوں کا مقابلہ کرنے سے $\text{ب}_1$، $\text{ب}_2$، $\text{ب}_3$ .... $\text{ب}_\text{ن}$ کی قیمتیں $\text{س}_1$، $\text{س}_2$، $\text{س}_3$ .... $\text{س}_\text{ن}$ کی رقوم میں معلوم ہو جاتی ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ب}_\text{ر}$ میں $\text{س}_\text{ر}$ کے بعد کی قوتوں کا کوئی مجموعہ شامل نہیں ہوتا۔

اگر متماثلہ (۱) کو ما کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو حاصل ہونیوالی متماثلہ مساوات سے دفعہ ۷۷، کی وہ مساواتیں اخذ کیجا سکتی ہیں جو سروں اور قوتوں کے مجموعوں کو مربوط کرتی ہیں۔

اس امر کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں یا کسی سر کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کرنیکا مسئلہ کامل طور پر معین ہے کیونکہ ہر صورت میں صرف ایک حل حاصل ہوتا ہے۔

آئندہ کسی باب میں سروں کی رقوم میں $\text{س}_\text{م}$ کے لئے اور اصلونکی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں $\text{ب}_\text{م}$ کے لئے عام جملے دئے جائیں گے جو ویرنگ (Waring) سے منسوب ہیں۔

## مثالیں

۱۔ $\text{فہ}(\text{عہ}_1) + \text{فہ}(\text{عہ}_2) + \cdots + \text{فہ}(\text{عہ}_\text{ن})$

کی قیمت معلوم کرو جہاں $\text{ف}(\text{لا}) = 0$ کی اصلیں $\text{عہ}_1$، $\text{عہ}_2$، $\text{عہ}_3$، ..... $\text{عہ}_\text{ن}$ ہیں اور $\text{فہ}(\text{لا})$، لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے۔

ہمیں معلوم ہے

$$\frac{\text{ف}'(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_1} + \frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_2} + \cdots + \frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_\text{ن}},$$

اور

$$\frac{\text{ف}'(\text{لا})\,\text{فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_1} + \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_2} + \cdots + \frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{لا}-\text{عہ}_\text{ن}}$$

(172) تقسیم کی تکمیل کرنے سے اور اس مساوات کی طرفین میں صرف باقیوں کو برقرار رکھنے سے

$$\frac{\text{ک}_۰\text{لا}^{\text{ن}-۱}+\text{ک}_۱\text{لا}^{\text{ن}-۲}+\ldots\ldots+\text{ک}_{\text{ن}-۱}}{\text{ف}(\text{لا})}=\frac{\text{فہ}(\text{ع}_۱)}{\text{لا}-\text{ع}_۱}+\frac{\text{فہ}(\text{ع}_۲)}{\text{لا}-\text{ع}_۲}+\ldots+\frac{\text{فہ}(\text{ع}_\text{ن})}{\text{لا}-\text{ع}_\text{ن}}،$$

جس سے

$$\text{ک}_۰\text{لا}^{\text{ن}-۱}+\text{ک}_۱\text{لا}^{\text{ن}-۲}+\ldots\ldots+\text{ک}_{\text{ن}-۱}=\Sigma\,\text{فہ}(\text{ع}_۱)(\text{لا}-\text{ع}_۲)(\text{لا}-\text{ع}_۳)\ldots(\text{لا}-\text{ع}_\text{ن})$$

اور اس مساوات کی طرفین میں $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{ک}_۰=\Sigma\,\text{فہ}(\text{ع}_۱)،$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\text{س}_\text{ن}$، اس خارج قسمت میں $\frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$ کا سر ہے جو $\text{ف}'(\text{لا})$ کو ف (لا) سے تقسیم کرنے سے اور لا کی منفی قوتوں کی بموجب ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\text{س}_{-\text{ف}}$، اسی خارج قسمت میں $\text{لا}^{\text{ف}-۱}$ کا سر (بہ تبدیل علامت) ہے جب اسکو لا کی مثبت قوتوں کی بموجب ترتیب دیا جاتا ہے۔

۴۔ اگر فہ (لا) کا درجہ ن - ۲ سے تجاوز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}}\frac{\text{فہ}(\text{ع}_\text{ر})}{\text{ف}'(\text{ع}_\text{ر})}=۰۔$$

جہاں $\sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}}$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ر کو ۱ سے ن تک (بشمول ہر دو اعداد) تمام قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

جزوی کسور سے

$$\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}=\frac{\text{ا}_۱}{\text{لا}-\text{ع}_۱}+\frac{\text{ا}_۲}{\text{لا}-\text{ع}_۲}+\ldots\ldots+\frac{\text{ا}_\text{ن}}{\text{لا}-\text{ع}_\text{ن}}،$$

اور ف (لا) سے ضرب چلیپائی دینے اور یکے بعد دیگرے لا = عہ۱، عہ۲، ... رکھنے سے

$$\frac{\text{فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_1)}{\text{ف}'(\text{عہ}_1)}\,\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_1} + \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_2)}{\text{ف}'(\text{عہ}_2)}\,\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_2} + \dots + \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_{\text{ن}})}{\text{ف}'(\text{عہ}_{\text{ن}})}\,\frac{1}{\text{لا}-\text{عہ}_{\text{ن}}}،$$

جس سے

$$\frac{\text{لا فہ}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_{\text{ر}})}{\text{ف}'(\text{عہ}_{\text{ر}})}\left(1 + \frac{\text{عہ}_{\text{ر}}}{\text{لا}} + \frac{\text{عہ}_{\text{ر}}^{2}}{\text{لا}^{2}} + \dots\dots\right)$$

جب فہ (لا) کا درجہ ن ـ ۲ ہو تو مساوات کی دائیں جانب کو $\frac{1}{\text{لا}}$ کے تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی رقم ایسی نہیں ہے جسمیں $\frac{1}{\text{لا}}$ جزو ضربی کے طور پر نہ آتا ہو۔ اس لئے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{فہ}(\text{عہ}_{\text{ر}})}{\text{ف}'(\text{عہ}_{\text{ر}})} = 0$$

چونکہ فہ کوئی منطق صحیح تفاعل ہو سکتا ہے جس کا درجہ ن ـ ۲ سے متجاوز نہ کرے اسلئے ہمیں ذیل کی مخصوص صورتیں ملتی ہیں جو خاص توجہ کے قابل ہیں :ـ

$$\sum \frac{1}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\quad \sum \frac{\text{عہ}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\quad \dots\dots،\quad \sum \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-3}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0،\quad \sum \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-2}}{\text{ف}'(\text{عہ})} = 0$$

۵ ـ اگر ن متغیروں لا۱، لا۲، ... ، لان کے درمیان ذیل کی ن ـ ۲ مساواتیں (173)

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{لا}_{\text{ر}} = 0،\quad \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{عہ}_{\text{ر}}\,\text{لا}_{\text{ر}} = 0،\quad \dots\dots،\quad \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{عہ}_{\text{ر}}^{\text{ن}-3}\,\text{لا}_{\text{ر}} = 0$$

دیجائیں تو اِن ن متغیروں کو دو نئے متغیروں لا۱، لا۲ کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب :ـ $\text{لا}_{\text{ر}} = \frac{\text{لا}_1 + \text{عہ}_{\text{ر}}\,\text{لا}_2}{\text{ف}'(\text{عہ}_{\text{ر}})}$

## ۱۸ ـ متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن ـ

اصلوں کے متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصلوں کی قوتوں کے مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا

وزن کہینگے (دیکھو دفعہ ۲۸) اور وہ بڑی سے بڑی قوت جسمیں ہر اصل تفاعل کے اندر داخل ہوتی ہے تفاعل کا رتبہ کہلائیگی۔ مثلاً $\Sigma$ ع$^{2}$ ب$^{2}$ ج$^{2}$ کا وزن چھ اور اسکا رتبہ تین ہے۔ یہ ثابت کر دیا گیا ہے (دفعہ ۲۸) کہ اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل کی قیمت میں (جو سروں کی رقوم میں بیان کی گئی ہو) ہر رقم کے لاحقوں کا مجموعہ تفاعل کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔ اب ہم متشاکل تفاعلوں سے متعلق دوسرا مسئلہ ثابت کرتے ہیں یعنے:۔

کسی متشاکل تفاعل کی قیمت سروں ب$_{1}$، ب$_{2}$، ..... ب$_{ن}$ کی رقوم میں معلوم کیجائے تو اس جملہ کا درجہ، متشاکل تفاعل کے رتبہ کے مساوی ہوتا ہے

اِس کو دفعہ ۲۳ کی مساواتوں سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جا سکتا ہے کیونکہ اصلوں کی رقوم میں ہر ایک سر کی قیمت میں کوئی اصل صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے اور اس لئے سروں میں بڑے سے بڑا درجہ وہی ہوگا جو کسی ایک اصل کے متناظر متشاکل تفاعل کا ہے۔ مثلاً $\Sigma$ ع$^{2}$ ب$^{2}$ کی قیمت ب$_{2}^{2}$ − ۲ ب$_{1}$ ب$_{3}$ + ۲ ب$_{4}$ ہے۔ سروں کے اس تفاعل کا درجہ دو ہے اور یہ وہی ہے جو متشاکل تفاعل کا رتبہ ہے۔

چونکہ مندرجہ بالا مسئلہ اہم ہے اس لئے ہم اسکا ایک دوسرا ثبوت بھی دیتے ہیں جسمیں ا$_{0}$ کی کسی مناسب قوت سے متشاکل تفاعل کو ضرب دینے سے اِسکو سروں ا$_{0}$، ا$_{1}$، ا$_{2}$، ..... ا$_{ن}$ کے ایک متجانس صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے چنانچہ تفاعل آنیوالے اطلاقات میں عموماً اسی شکل میں نظر آئیگا۔

سروں

ب$_{1}$، ب$_{2}$، ب$_{3}$، ..... ، ب$_{ن}$

کی جگہ $\frac{ا_{1}}{ا_{0}}$ ، $\frac{ا_{2}}{ا_{0}}$ ، $\frac{ا_{3}}{ا_{0}}$ ، ........ $\frac{ا_{ن}}{ا_{0}}$ رکھو۔

اب اگر $\text{فہ}(\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \ldots, \text{عہ}_{\text{ن}})$ سے اصلوں کا کوئی منطق صحیح متشاکل تفاعل تعبیر ہو تو

$$\text{ا}_0^{\text{ہ}}\,\text{فہ}(\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \ldots, \text{عہ}_{\text{ن}}) = \text{ف}(\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \ldots, \text{ا}_{\text{ن}})$$

جہاں تفاعل $\text{ف}(\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \ldots, \text{ا}_{\text{ن}})$ کا درجہ سروں میں $\text{ہ}$ ہے اور یہ تفاعل سروں کا ایک متجانس صحیح تفاعل ہے جو $\text{ا}_0$ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہمیں ثابت یہ کرنا ہے کہ فہ کا درجہ $\text{ہ}$ ہے۔ اِس مقصد کے لئے اصلوں کو اِن کے متکافیوں میں بدل دو اور اسلئے $\text{ا}_0, \text{ا}_1, \text{ا}_2, \ldots \text{ا}_{\text{ن}}$ کو $\text{ا}_{\text{ن}}, \text{ا}_{\text{ن}-1}, \ldots$ $\text{ا}_0$ میں۔

پس

$$\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{ہ}}\,\text{فہ}\left(\frac{1}{\text{عہ}_1}, \frac{1}{\text{عہ}_2}, \ldots, \frac{1}{\text{عہ}_{\text{ن}}}\right) = \text{ف}(\text{ا}_{\text{ن}}, \text{ا}_{\text{ن}-1}, \ldots, \text{ا}_0) \ldots (1)$$

نیز

$$\text{فہ}\left(\frac{1}{\text{عہ}_1}, \frac{1}{\text{عہ}_2}, \ldots, \frac{1}{\text{عہ}_{\text{ن}}}\right) = \frac{\text{سا}(\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \text{عہ}_3, \ldots, \text{عہ}_{\text{ن}})}{(\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\ldots\text{عہ}_{\text{ن}})^{\text{پ}}}$$

جہاں فہ کا درجہ پ ہے اور سا ایک صحیح تفاعل ہے جو تمام اصلوں کے حاصل ضرب سے تقسیم نہیں ہوتا اور $(\text{عہ}_1\text{عہ}_2\ldots\text{عہ}_{\text{ن}})^{\text{پ}}$ تمام رقموں کے نسب نماؤں کا کم سے کم مشترک جزو ضربی ہے۔ (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{ا}_0^{\text{پ}}\,\text{سا}(\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \ldots, \text{عہ}_{\text{ن}}) = \pm\,\text{ا}_{\text{ن}}^{\text{پ}-\text{ہ}}\,\text{ف}(\text{ا}_{\text{ن}}, \text{ا}_{\text{ن}-1}, \ldots, \text{ا}_0)$$

اس مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ہ کے مساوی ہے کیونکہ اگر پ، ہ سے بڑا ہوتا تو $\text{سا}(\text{عہ}_1, \text{عہ}_2, \ldots, \text{عہ}_{\text{ن}})$ حاصل ضرب $\text{عہ}_1\text{عہ}_2\ldots\text{عہ}_{\text{ن}}$ سے

تقسیم ہوجاتا اور ر اگر کم ہوتا تو سروں کا تفاعل ف ($ا_{ن}$، $ا_{ن-۱}$، ...، $ا_{ر}$) $ا_{ر}$ سے تقسیم ہوجاتا اور یہ دونوں ہمارے مفروضہ کے خلاف ہیں۔

**۸۲۔ اصلوں کے متشاکل تفاعل کو محسوب کرنا۔** کسی منطق متشاکل تفاعل کو دفعہ ۸۰ کے مسئلہ کی مدد سے محسوب کیا جا سکتا ہے اگرچہ عملاً دوسرے طریقے بالعموم زیادہ سہولت بخش ہوتے ہیں جیسا کہ اس دفعہ کے آخر میں جو مثالیں دیگئی ہیں ان سے واضح ہوگا۔ ہم جلد دوم میں جہاں اس مضمون پر مزید بحث کی جائے گی یہ بھی بتائینگے کہ متشاکل تفاعلوں کے محسوب کرنے میں اکثر اوقات ان طریقوں کو استعمال کرنے سے سہولت پیدا ہوتی ہے جو وہاں ثابت کئے ہوئے اصولوں پر مبنی ہیں۔

(75) اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل میں رقموں کی تعداد آسانی کے ساتھ معلوم کیجا سکتی ہے۔ مثلاً ن ویں درجہ کی مساوات کے جملہ $\Sigma$ عہ$_{۱}^{۳}$ عہ$_{۲}^{۲}$ عہ$_{۳}$ میں رقموں کی تعداد ن (ن-۱) (ن-۲) ہے۔ یہ فی الحقیقت ن چیزوں کے ترتیبوں کی تعداد ہے جب انمیں سے تین تین کو اکٹھا لیا جائے۔ اگر کسی رقم میں اصلوں کے قوت نما سب کے سب مختلف نہ ہوں تو رقموں کی تعداد گھٹ جائیگی۔ مثلاً چار درجی کے لئے $\Sigma$ عہ$^{۲}$ بہ جہ میں چوبیس کی بجائے صرف بارہ رقمیں شامل ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۶ صفحہ ۶۶)۔ اسکی وجہ یہ ہے کہ $\Sigma$ عہ$^{۲}$ بہ جہ میں دو ترتیبوں عہ بہ جہ، عہ جہ بہ سے صرف ایک رقم ملتی ہے یعنی عہ$^{۲}$ بہ جہ۔ طالب علم اگر ترتیبوں کے نظریہ سے واقف ہے تو اسکو کسی مخصوص صورت میں اس قسم کی تخفیف کرنے میں کوئی مشکل پیش نہ آئیگی۔ جب اصلوں کے دو قوت نما مساوی ہوں تو اس تعداد کو ۱ × ۲ سے تقسیم کرنا ہوگا جو اس فرض کی بناء پر حاصل ہوتی ہے کہ تمام قوت نما مختلف ہیں۔ جب تین قوت نما مساوی ہوں تو اس تعداد کو ۱ × ۲ × ۳ سے تقسیم کرنا ہوگا اور علی ہذا القیاس۔ عام صورت میں ن ویں درجہ کی مساوات کے جملہ

ع ع$_{۱}^{ق}$ ع$_{۲}^{ر}$ ع$_{۳}^{ر}$ ..... میں رقموں کی تعداد ہو گی

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots\ldots(ن-م+۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots\ldots \times نہ}$$

جہاں م سے ہر رقم میں اصلوں کی تعداد اور نہ سے مساوی قوت نماؤں کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

جب اصلوں کے متشاکل تفاعل میں داخل ہونے والی بڑی سے بڑی قوت ایک چھوٹا عدد ہو یعنی جب تفاعل کا رتبہ چھوٹا ہو (دیکھو دفعہ ۸۱) تو متشاکل تفاعل کو محسوب کرنیکے لئے دفعہ ۲۷ میں بیان کردہ طریقے استعمال کرنا مفید ہو گا۔

یہ مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ جب کسی متشاکل تفاعل کو جس کا درجہ تمام اصلوں میں (یعنے اسکا وزن) ن ہو ن ویں درجہ کی مساوات کے لئے سروں ب$_{۱}$، ب$_{۲}$، ب$_{۳}$، ..... ، ب$_{ن}$ کی رقوم میں محسوب کیا جاتا ہے تو اسکی قیمت کسی اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کے لئے (جب عددی سر سب کے سب ایک کے مساوی ہوں) وہی ہوتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ ب$_{ن}$ کے بعد کا کوئی سر اس قیمت میں داخل نہیں ہو سکتا اور دفعہ ۲۷ کی مساواتیں جنکے ذریعہ ہم فرض کرتے ہیں کہ قیمت محسوب کیگئی ہے وہی شکل رکھتی ہیں خواہ مساوات ن ویں درجہ کی ہو یا اس سے بڑے درجہ کی۔ یہ بھی واضح ہے کہ اس متشاکل تفاعل کی قیمت، م درجہ کی مساوات کیلئے (جبکہ م < ن)، حاصل ہو سکتی ہے اگر ن ویں درجہ کی مساوات کے لئے اس متشاکل تفاعل کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اسمیں ب$_{م+۱}$، ب$_{م+۲}$، (176)
..... ، ب$_{ن}$ سب کو صفر کے مساوی رکھا جائے کیونکہ کمتر درجہ کی مساوات کو ن ویں درجہ کی مساوات سے اس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے کہ ب$_{م}$ کے بعد آنیوالے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھدیا جائے۔ اور اسی طرح

متناظر متشاکل تفاعل اصلوں عم+۱ ، عم+۲ ، .... ، عن میں سے ہر ایک کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

# مثالیں

۱۔ مساوات

لاⁿ + ب۱ لاⁿ⁻¹ + ب۲ لاⁿ⁻² + .... + بن-۱ لا + بن = ۰

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل Σ ع۱² ع۲ ع۳ کو محسوب کرو۔

مساواتوں

Σ ع۱ = − ب۱

Σ ع۱ ع۲ ع۳ = − ب۳

کو باہم ضرب دو۔

حاصل ضرب میں رقم ع۱² ع۲ ع۳ صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہے اور رقم ع۱ ع۲ ع۳ ع۴ چار مرتبہ کیونکہ ع۱ کو ع۲ ع۳ ع۴ سے ، ع۲ کو ع۱ ع۳ ع۴ سے ، ع۳ کو ع۱ ع۲ ع۴ سے ، اور ع۴ کو ع۱ ع۲ ع۳ سے ضرب دینا ہوگا۔

پس Σ ع۱² ع۲ ع۳ + ۴ Σ ع۱ ع۲ ع۳ ع۴ = ب۱ ب۳

اس لئے Σ ع۱² ع۲ ع۳ = ب۱ ب۳ − ۴ ب۴

(مثال ۶ دفعہ ۲۷ کے ساتھ مقابلہ کرو)

اگر دفعہ ۸۷ کے طریقہ سے حساب لگایا جاتا تو

Σ ع۱² ع۲ ع۳ = ½ س۲ س۱² − س۱ س۳ − ½ س۲² + س۴

اور اس میں دفعہ ۷۷ کی قیمتیں درج کرنے سے وہی اوپر کا نتیجہ حاصل ہوتا۔

لیکن اس صورت میں ظاہر ہے کہ پہلا طریقہ بہت زیادہ آسان ہے کیونکہ $\text{س}_1$، $\text{س}_2$ وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی ایسی رقمیں داخل ہوتی ہیں جو ایک دوسرے کو زائل کرتی ہیں۔

۲ — $\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

یہاں $\Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ کا مربع لینے سے

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 + 2\,\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 + 6\,\Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4 = \text{ب}_2^2$$

مربع لینے میں یہ ظاہر ہے کہ رقم $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$، $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2$ کو $\text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1 \text{عہ}_3$ کو $\text{عہ}_2 \text{عہ}_4$ سے یا $\text{عہ}_1 \text{عہ}_4$ کو $\text{عہ}_2 \text{عہ}_3$ سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی۔ پس نتیجہ میں $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ کا سرچھ ہوگا کیونکہ مربع میں ہر حاصل ضرب دو مرتبہ واقع ہوتا ہے۔ اس مثال اور مثال ۸ دفعہ ۲۷ میں صرف یہ فرق ہے کہ رقم $\text{عہ}_1 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3 \text{عہ}_4$ کے قبل $\Sigma$ ہے۔ اس لئے بالآخر

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 = \text{ب}_2^2 - 2\,\text{ب}_1 \text{ب}_3 + 2\,\text{ب}_4$$

۳ — $\Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔ (177)
مثال ۹ دفعہ ۲۷ کی طرح یہاں

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \; \Sigma\, \text{عہ}_1 \text{عہ}_2 = \Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2 + \Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2 \text{عہ}_3,$$

اس لئے گذشتہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\Sigma\, \text{عہ}_1^3 \text{عہ}_2 = \text{ب}_1^2 \text{ب}_2 - 2\,\text{ب}_2^2 - \text{ب}_1 \text{ب}_3 + 4\,\text{ب}_4$$

۴ — $\Sigma\, \text{عہ}_1^2 \text{عہ}_2^2 \text{عہ}_3$ کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔
نتیجہ وہی ہوگا جو پانچویں درجہ کی مساوات کے لئے حساب لگانے میں ہوتا۔

اس متشاکل تفاعل کو حاصل کرنیکے لئے ہم $\Sigma$ عہ$_1$ عہ$_2$ اور $\Sigma$ عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_3$ کو باہم ضرب دیتے ہیں اور یہ دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنمیں پانچ اصلیں عہ$_1$، عہ$_2$، عہ$_3$، عہ$_4$، عہ$_5$ شامل ہوں۔ رقم عہ$_1^2$ عہ$_2^2$ عہ$_3$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ پیدا ہو سکتی ہے صرف عہ$_1$ عہ$_2$ کو عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_3$ سے ضرب دینے سے۔ نمونہ عہ$_1^2$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ کی رقمیں، انمیں سے ہر ایک، تین مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ رقم عہ$_1^2$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ پیدا ہوگی عہ$_1$ عہ$_2$ کو عہ$_1$ عہ$_3$ عہ$_4$ سے یا عہ$_1$ عہ$_3$ کو عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_4$ سے یا عہ$_1$ عہ$_4$ کو عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_3$ سے ضرب دینے سے اور کسی اور طرح پیدا نہیں ہو سکتی۔ رقم عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ عہ$_5$ دس مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ اصلوں کے کسی زوج کو دوسری تین اصلوں سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی اور پانچ اصلوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد دس ہے۔ اسلئے عام مساوات کے لئے

$$\Sigma\,\text{عہ}_1\text{عہ}_2\;\Sigma\,\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3 = \Sigma\,\text{عہ}_1^2\text{عہ}_2^2\text{عہ}_3 + 3\,\Sigma\,\text{عہ}_1^2\text{عہ}_2\text{عہ}_3\text{عہ}_4 + 10\,\Sigma\,\text{عہ}_1\text{عہ}_2\text{عہ}_3\text{عہ}_4\text{عہ}_5$$

[ ن = ۵ کے لئے ہم اس مساوات کی تصدیق بالکل ایسے ہی کر سکتے ہیں جیسے مثال ۹ دفعہ ۲۷ میں۔ کیونکہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب میں جبکہ ہر جزو ضربی میں دس رقمیں ہوں ۱۰۰ رقمیں ہونگی یعنے عہ$_1^2$ عہ$_2^2$ عہ$_3$ کے نمونہ کی ۳۰ رقمیں عہ$_1^2$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ کے نمونہ کی ۲۰ رقمیں لیکن انمیں سے ہر ایک تین مرتبہ، اور رقم عہ$_1$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ عہ$_5$ ۱۰ مرتبہ۔]

اس طرح مطلوبہ متشاکل تفاعل کو محسوب کرنیں $\Sigma$ عہ$_1^2$ عہ$_2$ عہ$_3$ عہ$_4$ کو

محسوب کرنا پڑیگا جس کے لئے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$\sum \text{ع}_1 \sum \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4 = \sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4 + 5\sum \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5$$

پس بالآخر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2^2\text{ع}_3 = -\text{ب}_2\text{ب}_3 + 3\text{ب}_1\text{ب}_4 - 5\text{ب}_5$$

دفعہ ۸۷ کے طریقہ میں $\text{س}_5$ کو محسوب کرنا پڑیگا اور $\text{س}_1$، $\text{س}_2$ وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی رقمیں داخل ہونگی جو نتیجہ میں خارج ہونگی۔

۵- $\sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2^2\text{ع}_3\text{ع}_4$ کی قیمت عام مساوات کے لئے معلوم کرو۔

ہم $\sum \text{ع}_1\text{ع}_2$ کو $\sum \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4$ سے ضرب دیتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنمیں چھ اصلیں $\text{ع}_1$، $\text{ع}_2$، $\text{ع}_3$، $\text{ع}_4$، $\text{ع}_5$، $\text{ع}_6$ شامل ہوں۔

رقم $\text{ع}_1^2\text{ع}_2^2\text{ع}_3\text{ع}_4$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوسکتی ہے نمونہ $\text{ع}_1^2\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5$ کی رقموں میں سے ہر ایک چار مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ رقم پیدا ہوتی ہے $\text{ع}_1\text{ع}_2$ کو $\text{ع}_1\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5$ سے، یا $\text{ع}_1\text{ع}_3$ کو $\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_4\text{ع}_5$ سے، یا $\text{ع}_1\text{ع}_4$ کو $\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_5$ سے، یا $\text{ع}_1\text{ع}_5$ کو $\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4$ سے ضرب دینے سے۔ رقم $\text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5\text{ع}_6$ پندرہ مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ چھ اصلوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد ۱۵ ہے (178)

پس

$$\sum \text{ع}_1\text{ع}_2 \sum \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4 = \sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2^2\text{ع}_3\text{ع}_4 + 4\sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5 + 15\sum \text{ع}_1\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5\text{ع}_6$$

پھر $\sum \text{ع}_1^2\text{ع}_2\text{ع}_3\text{ع}_4\text{ع}_5$ کو محسوب کرنے کے لئے

$$\sum ع_1 \sum ع_1ع_2ع_3ع_4ع_5 = \sum ع_1^2ع_2ع_3ع_4ع_5$$
$$+6\sum ع_1ع_2ع_3ع_4ع_5ع_6$$

پس بالآخر

$$\sum ع_1^2ع_2ع_3ع_4 = ب_2ب_4 - 4ب_1ب_5 + 9ب_6$$

۶ــ عام مساوات کے سروں کی رقوم میں $\sum ع_1^2ع_2^2ع_3^2$ کی قیمت معلوم کرو۔

$\sum ع_1ع_2ع_3$ کا مربع لینے سے

$$\sum ع_1ع_2ع_3 \sum ع_1ع_2ع_3 = \sum ع_1^2ع_2^2ع_3^2 + 2\sum ع_1^2ع_2^2ع_3ع_4$$
$$+6\sum ع_1^2ع_2ع_3ع_4ع_5 + 20\sum ع_1ع_2ع_3ع_4ع_5ع_6$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\sum ع_1^2ع_2^2ع_3^2 = ب_3^2 - 2ب_2ب_4 + 2ب_1ب_5 - 2ب_6$$

**۸۳ ــ متجانس حاصل ضرب** ــ عام طور پر ن مقداروں $ع_1$، $ع_2$، ...، $ع_ن$ کے وہ متشاکل تفاعل جنکا وزن ایک ہی ہو متعدد ہوتے ہیں اور انمیں دو یا زیادہ وہ تفاعل بھی شریک کئے جا سکتے ہیں جن کا رتبہ اور وزن دونوں ایک ہی ہوں۔ مثلاً کسی ن حروف میں سے مندرجۂ ذیل متشاکل تفاعل بنائے جا سکتے ہیں جنکا وزن چار ہے :-

$$\sum ع_1^4،\ \sum ع_1^3ع_2،\ \sum ع_1^2ع_2^2،\ \sum ع_1^2ع_2ع_3،\ \sum ع_1ع_2ع_3ع_4$$

وزن ر کے تمام ایسے متشاکل تفاعلوں کے مجموعہ کو ہم ن حروف کا "ر ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کا مجموعہ" کہینگے اور اس مجموعہ کو $\Pi_ر$ سے تعبیر کرینگے

یہ دیکھنا آسان ہے کہ $\Pi_ر$، ن اجزائے ضربی کے حسب ذیل حاصل ضرب میں

لاˊ کا سر ہے :-

$$(١ + ع_١ لا + ع_١^٢ لا^٢ + \ldots)(١ + ع_٢ لا + ع_٢^٢ لا^٢ + \ldots)\ldots(١ + ع_ن لا + ع_ن^٢ لا^٢ + \ldots)$$

ذیل میں جو مثالیں دی گئی ہیں انمیں نہایت اہم بنیادی مسئلے شامل ہیں جو متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں اور اُن مساوات کے سروں میں تعلق ظاہر کرتے ہیں جس کی اصلیں $ع_١، ع_٢، ع_٣، \ldots، ع_ن$ ہیں۔

# مثالیں

١۔ ثابت کرو

$$\Pi_ر = \sum \frac{ع^{ن+ر-١}}{ف'(ع)}$$

چونکہ

$$\frac{لا^ن}{ف(لا)} = \frac{١}{(١-ع_١ ما)(١-ع_٢ ما)\ldots(١-ع_ن ما)}، \text{جہاں } ما = \frac{١}{لا}$$

$$= (١ + ع_١ ما + ع_١^٢ ما^٢ + \ldots)(١ + ع_٢ ما + ع_٢^٢ ما^٢ + \ldots)\ldots(١ + ع_ن ما + ع_ن^٢ ما^٢ + \ldots)$$

$$= ١ + \Pi_١ ما + \Pi_٢ ما^٢ + \ldots\ldots + \Pi_ر ما^ر + \ldots\ldots \quad (١)$$

(179) اور $$\frac{لا^{ن-١}}{ف(لا)} = \sum \frac{ع^{ن-١}}{ف'(ع)} \times \frac{١}{لا-ع}$$

اسلئے $$\frac{لا^ن}{ف(لا)} = \sum \frac{ع^{ن-١}}{ف'(ع)} \times \frac{١}{١-ع ما} = \sum \frac{ع^{ن+ر-١}}{ف'(ع)} ما^ر \ldots (٢)$$

(١) اور (٢) میں $ما^ر$ کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

٢۔ اصلوں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو اور بالعکس۔

چونکہ

$$(\text{۱} - \text{عہ}_1 \text{ما})(\text{۱} - \text{عہ}_2 \text{ما}) \dots (\text{۱} - \text{عہ}_\text{ن} \text{ما}) = \text{۱} + \text{ب}_1 \text{ما} + \text{ب}_2 \text{ما}^2 + \dots + \text{ب}_\text{ن} \text{ما}^\text{ن}$$

اسلئے مثال ماسبق سے

$$(\text{۱} + \text{ب}_1 \text{ما} + \text{ب}_2 \text{ما}^2 + \dots + \text{ب}_\text{ن} \text{ما}^\text{ن})(\text{۱} + \Pi_1 \text{ما} + \Pi_2 \text{ما}^2 + \dots) \equiv \text{۱}$$

جس سے

$$\text{ب}_1 + \Pi_1 = \text{۰}،\ \text{ب}_2 + \Pi_2 + \text{ب}_1 \Pi_1 = \text{۰}،\ \text{ب}_3 + \Pi_3 + \text{ب}_1 \Pi_2 + \text{ب}_2 \Pi_1 = \text{۰}،$$

.......................................

اِن مساواتوں سے (جنمیں ب$_1$، ب$_2$ وغیرہ اور $\Pi_1$، $\Pi_2$ وغیرہ کا آپسمیں تبادلہ ہوسکتا ہے) ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$،... ب$_\text{ن}$ کو $\Pi_1$، $\Pi_2$،... $\Pi_\text{ن}$ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور بالعکس ۔

اس مثال اور مثال ماسبق کے ذریعہ حسب ذیل متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کیجاسکتی ہیں :۔

$$\Sigma \frac{\text{عہ}^{\text{ن}-\text{۱}}}{\text{ف}'(\text{عہ})}،\ \Sigma \frac{\text{عہ}^\text{ن}}{\text{ف}'(\text{عہ})}،\ \Sigma \frac{\text{عہ}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ف}'(\text{عہ})}،\ \text{وغیرہ}$$

**۳**۔ $\Pi_\text{ر}$ کو اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کے ذریعہ بیان کرو ۔

حاصل ضرب (۱ - عہ$_1$ ما)(۱ - عہ$_2$ ما)... (۱ - عہ$_\text{ن}$ ما) کو $\frac{\text{۱}}{\text{۶}}$ سے تعبیر کرنے سے اور تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۶}} \cdot \frac{\text{فر۶}}{\text{فرما}} = \Sigma \frac{\text{عہ}}{\text{۱} - \text{عہ ما}} = \text{س}_1 + \text{س}_2 \text{ما} + \text{س}_3 \text{ما}^2 + \dots\dots$$

نیز $\quad \text{۶} = \text{۱} + \Pi_1 \text{ما} + \Pi_2 \text{ما}^2 + \dots\dots\dots$

اس لئے

$$(\text{۱} + \Pi_1 \text{ما} + \Pi_2 \text{ما}^2 + \dots)(\text{س}_1 + \text{س}_2 \text{ما} + \text{س}_3 \text{ما}^2 + \dots) \equiv \Pi_1 + \text{۲} \Pi_2 \text{ما} + \text{۳} \Pi_3 \text{ما}^2 + \dots$$

..........

اب ما کی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں مساواتوں کی ایک تعداد ملتی ہے جن کے ذریعہ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں ح۱، ح۲، ح۳...کو س۱، س۲، س۳ وغیرہ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۴ ۔ متجانس حاصل ضربوں کے مجموں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے کے لئے ذیل کا ضابطہ ثابت کرو:۔

$$\frac{\text{فر}\,\text{س}_{\text{ر}+\text{ع}}}{\text{فر}\,\text{ب}_{\text{ر}}} = -(\text{ر}+\text{ع})\,\text{ح}_{\text{ع}}$$

دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) کی طرفین کو تفرق کرو اور مثال ۲ کی مساوات سے ح۱، ح۲، ح۳ وغیرہ کو داخل کرو۔

# (180) نواں باب

## مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں

**۸۴ ـ انتہاؤں کی تعریف** ۔ عددی مساواتوں کی حقیقی اصلونکو دریافت کرنے کی کوشش میں سب سے پہلے اُن حدود کی قریب ترین قیمتیں معلوم کرنا مفید ہے جنکے اندر یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ۔ ہم یہاں وہ تحقیقات شروع کرتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴ کے آخر میں دیا گیا تھا اور چند مسئلے ثابت کرتے ہیں جنکا تعلق مساواتوں کی حقیقی اصلوں کی انتہاؤں سے ہے ۔

مثبت اصلوں کی علوی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان اصلوں میں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور سفلی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو انمیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو منفی اصلوں کی علوی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انمیں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور انکی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انمیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو ، یہاں سب سے بڑے منفی عدد سے مراد وہ عدد ہے جو $-\infty$ سے قریب ترین ہے ۔

جب ہم وہ انتہائیں معلوم کر لیتے ہیں جنکے اندر مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں تو مساوات کو حل کرنیمیں دوسرا کام یہ ہوگا کہ وہ وقفے دریافت کئے جائیں جنمیں مختلف اصلیں واقع ہوتی ہیں ۔ اس موخرالذکر مقصد کے لئے جو خاص طریقے رائج ہیں اُن کا ذکر آئندہ باب میں

کیا جائیگا۔

ذیل کے تمام مسئلے مثبت اصلوں کی علوی انتہاؤں سے متعلق ہیں اور آگے چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ سفلی انتہاؤں اور منفی اصلوں کی تعئین آسانی کے ساتھ ان مسئلوں سے ہو سکتی ہے۔

## ۸۵ ـــ مسئلہ ۱۔ کسی مساوات

$$لا^{ن} + ب_{۱} لا^{ن-۱} + ب_{۲} لا^{ن-۲} + \dots + ب_{ن-۱} لا + ب_{ن} = ۰$$

میں اگر پہلی منفی رقم $- ب_{ر} لا^{ن-ر}$ ہو اور اگر بڑے سے بڑا منفی سر $- ب_{س}$ ہو تو مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا $\sqrt[ر]{ب_{س}} + ۱$ ہوگی (181)

لا کی کوئی قیمت جو

$$لا^{ن} > ب_{س} (لا^{ن-ر} + لا^{ن-ر-۱} + \dots + لا + ۱) > ب_{س} \frac{لا^{ن-ر+۱} - ۱}{لا - ۱}$$

بناوے بدرجہ اولیٰ ف (لا) کو مثبت بنائیگی۔

اب لا کو ایک سے بڑا لینے سے یہ نامساوات، ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$لا^{ن} > ب_{س} \frac{لا^{ن-ر+۱}}{لا - ۱}$$

یعنے $$لا^{ن+۱} - لا^{ن} > ب_{س} لا^{ن-ر+۱}$$

یعنے $$لا^{ر-۱} (لا - ۱) > ب_{س}$$

اور پھر یہ نامساوات، ذیل کے رشتہ سے پوری ہوتی ہے:-

$$(لا-۱)^{ر-۱}(لا-۱) = یا > ب_س$$

کیونکہ صریحاً $لا^{ر-۱} > (لا-۱)^{ر-۱}$

اس لئے بالآخر

$$(لا-۱)^{ر} = یا > ب_س$$

یعنی

$$لا = یا > ۱ + \sqrt[ر]{ب_س}$$

**۸۶ ۔ مسئلہ ۲ ۔** اگر کسی مساوات میں ہر منفی سر کو مثبت لیا جائے اور اس کو اس کے قبل کے تمام مثبت سروں کے مجموعہ سے تقسیم کیا جائے تو وہ بڑے سے بڑا خارج قسمت جو اسطرح حاصل ہوا ہو اسمیں ایک جمع کرنے کے بعد مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہوگا۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$ا_. لا^{ن} + ا_۱ لا^{ن-۱} + ا_۲ لا^{ن-۲} - ا_۳ لا^{ن-۳} + \cdots - ا_ر لا^{ن-ر} + \cdots + ا_ن = ۰$$

جس میں ہم وضاحت کی خاطر چوتھے سر کو منفی سمجھتے ہیں اور عام صورت میں ایک منفی سر ـ $ا_ر$ پر بھی غور کرتے ہیں ۔

فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر مثبت رقم کو ضابطہ

$$ا_م لا^{م} = ا_م (لا-۱)(لا^{م-۱} + لا^{م-۲} + \cdots + لا + ۱) + ا_م$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے جہاں یہ ضابطہ

(182)

$$\frac{لا^{م} - ۱}{لا - ۱} = لا^{م-۱} + لا^{م-۲} + \cdots + لا + ۱$$

سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔ منفی ارقام غیر متبدل رہتی ہیں۔

تب ف (لا) کی رقموں کے جواب میں ذیل کے افقی خطوط ملتے ہیں جنکا مجموعہ کثیر الارقام ف (لا) ہے۔

$$\text{ا}_0(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-1}+\text{ا}_0(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-2}+\text{ا}_0(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-3}+\ldots+\text{ا}_0(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}+\ldots+\text{ا}_0,$$

$$+\text{ا}_1(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-2}+\text{ا}_1(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-3}+\ldots+\text{ا}_1(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}+\ldots+\text{ا}_1,$$

$$+\text{ا}_2(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-3}+\ldots+\text{ا}_2(\text{لا}-1)\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}+\ldots+\text{ا}_2,$$

$$-\text{ا}_3\,\text{لا}^{\text{ن}-3},$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-\text{ا}_\text{ر}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\text{ا}_\text{ن}$$

اب ہم اس جملے کی انتصابی قطاروں کو کثیر الارقام کی متواتر رقمیں قرار دیتے ہیں۔ چنانچہ $\text{لا}^{\text{ن}-1}$، $\text{لا}^{\text{ن}-2}$، وغیرہ کے سر علی الترتیب یہ ہونگے

$$\text{ا}_0(\text{لا}-1),\ (\text{ا}_0+\text{ا}_1)(\text{لا}-1),\ (\text{ا}_0+\text{ا}_1+\text{ا}_2)(\text{لا}-1)-\text{ا}_3,\ \text{وغیرہ}$$

لا کی کوئی، ایک سے بڑی قیمت ہر اُس رقم کو مثبت بنا دیگی جسمیں منفی سر $\text{ا}_3$، $\text{ا}_\text{ر}$ وغیرہ واقع نہیں ہوتے۔ اُن رقموں کو مثبت بنانیکے لئے جنمیں منفی سر واقع ہوتے ہیں یہ ضروری ہے کہ،

$$(\text{ا}_0+\text{ا}_1+\text{ا}_2)(\text{لا}-1)>\text{ا}_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\text{لا}-1)(\text{ا}_0+\text{ا}_1+\text{ا}_2+\ldots+\text{ا}_{\text{ر}-1})>\text{ا}_\text{ر},\ \text{وغیرہ}$$

پس

$$\text{لا} > \frac{\text{ا}_{\text{س}}}{\text{ا}_{\cdot}+\text{ا}_{1}+\text{ا}_{2}} + 1 \text{ ، } \dots \text{ ، } \text{لا} > \frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{ا}_{\cdot}+\text{ا}_{1}+\text{ا}_{2}+\text{ا}_{3}+\dots+\text{ا}_{\text{ر}-1}} + 1 \text{ وغیرہ}$$

اور ہر رقم کو مثبت بنانے کے لئے ہمیں بڑی سے بڑی وہ قیمت لینی چاہیئے جو اس طور پر حاصل ہو۔ اس لئے لا کی ایسی قیمت مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہے۔

183 ۸۷ — **عملی اطلاقات** — اصلوں کی قریبی انتہائیں عملی طور پر معلوم کرنے میں پچھلے دو دفعات کے مسئلوں سے سب سے زیادہ سہولت بخش عام طریقے ملتے ہیں۔ بعض اوقات ایک مسئلہ سے قریب تر انتہا ملیگی اور بعض اوقات دوسرے سے۔ اس لئے دونوں مسئلوں کو استعمال کر کے قریب تر انتہا معلوم کرنا بہتر ہوگا۔ مسئلہ ۱ عموماً زیادہ کارآمد اسوقت ہوگا جبکہ پہلے منفی سر کے قبل متعدد مثبت سر ہوں تاکہ ر کافی بڑا ہو۔ اور مسئلہ ۲ اسوقت جبکہ پہلے بڑے منفی سر کے قبل بڑے مثبت سر واقع ہوں۔ عام طور پر مسئلہ ۲ کو استعمال کرنے سے زیادہ تر قریبی انتہا معلوم ہوگی۔ ہم یہاں انتہا سے مراد وہ صحیح عدد لے رہے ہیں جو ان مسئلوں سے حاصل شدہ عددی قیمت کے عین بعد واقع ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱ — مساوات

$$\text{لا}^{4} - ۵\,\text{لا}^{3} + ۴۰\,\text{لا}^{2} - ۸\,\text{لا} + ۲۳ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی ۸ + ۱ یعنے ۹،

مسئلہ ۲ سے انتہا ملیگی $\frac{۵}{۱} + ۱$ یعنے ۶،

پس ایک علوی انتہا ۲ ہے ۔

۲ ۔ مساوات

$$لا^{۵} + ۳لا^{۴} + لا^{۳} - ۸لا^{۲} - ۵۱لا + ۱۸ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو ۔

مسئلہ ۱ سے حاصل ہوگا $\sqrt[۳]{۵۱} + ۱$ اور اسلئے ایک انتہا ۵ ہے ۔

مسئلہ ۲ سے حاصل ہوگا $\frac{۵۱}{۱ + ۳ + ۱} + ۱$ اور اس لئے ایک انتہا ۱۲ ہے

اس صورت میں مسئلہ ۱ سے قریب تر انتہا ملتی ہے ۔

۳ ۔ $لا^{۷} + ۴لا^{۶} - ۳لا^{۵} + ۵لا^{۴} - ۹لا^{۳} - ۱۱لا^{۲} + ۶لا - ۸ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو ۔

کسروں

$$\frac{۳}{۱ + ۴} ، \frac{۹}{۱ + ۴ + ۵} ، \frac{۱۱}{۱ + ۴ + ۵} ، \frac{۸}{۱ + ۴ + ۵ + ۶}$$

میں سے تیسری کسر سب سے بڑی ہے اور مسئلہ ۲ سے انتہا ہوگی ۳ ۔ مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی ۵ ۔

۴ ۔ $لا^{۸} + ۲۰لا^{۷} + ۴لا^{۶} - ۱۱لا^{۵} - ۱۲۰لا^{۴} + ۱۳لا - ۲۵ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو ۔

**جواب :** ۔ دونوں طریقوں سے انتہا ملیگی ۶ ۔

۵ ۔ $۴لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۲۲لا^{۳} + ۹۸لا^{۲} - ۳۷لا + ۵ = ۰$

کی مثبت اصلوں کی انتہا معلوم کرو ۔

**جواب :** ۔ مسئلہ ۱ سے ۲۰، مسئلہ ۲ سے ۳ ۔

عموماً صرف معائنہ سے ایسی انتہا کا معلوم کرنا ممکن ہے جو متذکرہ صدر (184)
مسئلوں سے حاصل شدہ انتہاؤں سے قریب تر ہو ۔ یہ طریقہ اس بات پر مشتمل

ہوتا ہے کہ ہم مجوزہ مساوات کی رقموں کو گروہوں میں ترتیب دیں اس طور پر کہ ہر گروہ میں ایک مثبت رقم پہلے رکھی جائے اور پھر یہ دیکھیں کہ وہ کم سے کم صحیح عدد کونسا ہے جس کو لا کی بجائے رکھنے سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ کسی خاص صورت میں خود مساوات کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ ترتیب کی صورت کیا ہونی چاہئے۔

۶ ۔ مثال ۲ کی مساوات کو یوں ترتیب دیا جا سکتا ہے :۔

$$\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۳}-۸)+\text{لا}(۳\,\text{لا}^{۳}-۵۱)+\text{لا}^{۳}+۱۸=۰$$

لا = ۳ یا اس سے کوئی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ پس ایک علوی انتہا ۳ ہے۔

۷ ۔ مثال ۴ کی مساوات کی ترتیب یہ ہو سکتی ہے :۔

$$\text{لا}^{۵}(\text{لا}^{۳}-۱۱)+۲۰\,\text{لا}^{۴}(\text{لا}^{۳}-۶)+۴\,\text{لا}^{۶}+۱۳\,\text{لا}-۲۵=۰$$

لا = ۳ یا اس سے کسی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ اسلئے ایک انتہا ۳ ہے۔

۸ ۔ مساوات

$$\text{لا}^{۴}-۴\,\text{لا}^{۳}+۳۳\,\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}+۱۸=۰$$

کی اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

اس کو شکل

$$\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}+۵)+۲۸\,\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{۱}{۱۴}\right)+۱۸=۰$$

میں رکھا جا سکتا ہے۔ اب چونکہ سہ رقمی $\text{لا}^{۲}-۴\,\text{لا}+۸$ کی اصلیں خیالی ہیں، یہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۱۲)۔ پس لا = ۱ علوی انتہا ہے۔

دو درجی کو اس طور پر کسی گروہ میں داخل کرنے سے اکثر صورتوں میں فائدہ ہوگا بشرطیکہ اسکی اصلیں خیالی یا مساوی ہوں۔

۹ ۔ مساوات $۵\,\text{لا}^{۵}-۷\,\text{لا}^{۴}-۱۰\,\text{لا}^{۳}-۲۳\,\text{لا}^{۲}-۹۰\,\text{لا}-۳۱۷=۰$

کی اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔
اس قسم کی مثالوں میں سہولت اسمیں ہوگی کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کردیا جائے۔ چنانچہ اوپر کی مساوات کو اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے:-

$لا^{۴}(لا-۷)+لا^{۳}(لا^{۲}-۱۰)+لا^{۲}(لا^{۳}-۲۳)+لا(لا^{۴}-۹۰)+لا^{۵}-۳۱۷=۰$

ظاہر ہے کہ اصلوں کی ایک علوی انتہا ۷ ہے۔ یہاں عام طریقوں سے زیادہ دور کی انتہا ملتی ہے۔

۱۰— مساوات

$لا^{۴}-لا^{۳}-۲لا^{۲}-۴لا-۲۴=۰$

کی اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔
جب منفی رقمیں متعدد ہوں اور بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو تو سہولت اسمیں ہے کہ پوری مساوات کو ایسے عدد سے ضرب دیا جائے کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کیا جاسکے۔ یہاں ۴ سے ضرب دیکر مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:

$لا^{۳}(لا-۴)+لا^{۲}(لا^{۲}-۸)+لا(لا^{۳}-۱۶)+لا^{۴}-۹۶=۰$

علوی انتہا ۴ ہے۔ عام طریقوں سے ۲۵ حاصل ہوگی۔

۸۸— **مسئلہ ۳**— کوئی عدد جو کثیر الارقام ف (لا) اور اسکے تمام مشتق تفاعلوں $ف_{۱}(لا)$، $ف_{۲}(لا)$، $ف_{۳}(لا)$، ...، $ف_{ن}(لا)$ کو مثبت بنادے مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہوگا۔ (185)

انتہاؤں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ نیوٹن سے منسوب ہے۔ اسکو استعمال کرنے میں قبل الذکر طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ محنت اٹھانی پڑے گی لیکن اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس سے ہمیشہ بہت قریب کی انتہائیں

ملینگی اور ایسی مساوات کی صورت میں جسکی سب اصلیں حقیقی ہوں اس طریقہ سے
حاصل کی ہوئی انتہا جیسا کہ آگے چلکر ثابت کیا جائیگا بڑی سے بڑی اصل کے
عین بعد کا صحیح عدد ہوگی ۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = ۰
کی اصلوں کو بقدر ہ کے گھٹایا گیا ہے تو لا - ہ = ما

$$\text{ف}(\text{ما}+\text{ہ}) = \text{ف}(\text{ہ}) + \text{ف}_{۱}(\text{ہ})\,\text{ما} + \frac{\text{ف}_{۲}(\text{ہ})}{۱\times۲}\,\text{ما}^{۲} + \ldots\ldots + \frac{\text{ف}_{\text{ن}}(\text{ہ})}{۱\times۲\times\ldots\times\text{ن}}\,\text{ما}^{\text{ن}}$$

اب اگر ہ ایسا ہو کہ وہ تمام سروں

$$\text{ف}(\text{ہ})،\ \text{ف}_{۱}(\text{ہ})،\ \text{ف}_{۲}(\text{ہ})،\ \ldots،\ \text{ف}_{\text{ن}}(\text{ہ})$$

کو مثبت بنادے تو ما کی مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی جس کے
یہ معنی ہیں کہ لا کی مساوات کی کوئی اصل ہ سے بڑی نہیں ہو سکتی ۔ پس
مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ہ ہے ۔

## مثال

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۱۵\,\text{لا} - ۳$$

کسی مثال میں انتہاؤں کو معلوم کرنے کے لئے نیوٹن کا طریقہ استعمال کرنا
ہو تو عام طریقہ عمل حسب ذیل ہوگا:- وہ چھوٹے سے چھوٹا صحیح عدد لو جو
$\text{ف}_{\text{ن}-۱}$ (لا) کو مثبت بنادے اور ترتیب وار $\text{ف}_{۱}$ (لا) تک اوپر جاتے ہوئے
دوسرے تفاعلوں میں لا کی بجائے اس عدد کو درج کرنیکا اثر دریافت کرو۔
جب ایسے تفاعل پر پہنچو جو زیر بحث عدد سے منفی ہو جاتا ہے تو اسکو بقدر ایک کے
متواتر بڑھاتے جاؤ یہانتک کہ اس کے درج کرنے سے تفاعل مثبت ہو جائے

اور پھر اس نئے عدد کے ساتھ وہی عمل کرد جو اوپر مذکور ہوا اور اسکو بڑھاتے جاؤ اگر سلسلہ کا کوئی دوسرا تفاعل منفی ہو جائے۔ علیٰ ہذا یہانتک کہ ایسا عدد ملجائے جو سلسلہ کے تمام تفاعلوں کو مثبت بنادے۔ مثال بالا میں تفاعلوں کا سلسلہ یہ ہوگا:—

ف (لا) = لا$^{۴}$ − ۲ لا$^{۳}$ − ۳ لا$^{۲}$ − ۱۵ لا − ۳ ،

ف$_{۱}$ (لا) = ۴ لا$^{۳}$ − ۶ لا$^{۲}$ − ۶ لا − ۱۵ ،

$\frac{۱}{۲}$ ف$_{۲}$ (لا) = ۶ لا$^{۲}$ − ۶ لا − ۳ ،

$\frac{۱}{۶}$ ف$_{۳}$ (لا) = ۴ لا − ۲ ،

$\frac{۱}{۲۴}$ ف$_{۴}$ (لا) = ۱ ،

یہاں لا = ۱ سے ف$_{۳}$ (لا) مثبت بنجاتا ہے۔ ف$_{۲}$ (لا) میں لا = ۱ (186)
درج کرنے سے ف$_{۲}$ (لا) منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۲ سے ف$_{۲}$ (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف$_{۱}$ (لا) میں لا = ۲ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۳ سے ف$_{۱}$ (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۳ درج کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ پھر لا کو بقدر ایک کے بڑھانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۴ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ پس مطلوبہ علوی انتہا ۴ ہے۔

نیوٹن کے قاعدے کو اس طریقہ سے استعمال کرنے میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ جب کوئی عدد ایک خاص حد تک کے تمام مشتق تفاعلوں کو مثبت بناتا ہے تو اس سے بڑا کوئی عدد بھی ان سب کو مثبت بناتا ہے اور اس طرح سلسلہ کے نچلے تفاعلوں پر اس عدد کے اثر کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ امر مساوات

ف (ا + ه) = ف (ا) + فَ (ا) ه + فً (ا) $\frac{ه^{۲}}{۱ \times ۲}$ + ..........

سے ظاہر ہے (سلسلہ کے کسی تفاعل کو فہ (لا) سے تعبیر کرو اور مشتق تفاعلوں کے لئے عام ترقیم استعمال کرو) جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر فہ (ا)، فہَ (ا)، فہً (ا)، ..... سب کے سب مثبت ہوں اور ہ بھی مثبت ہو تو فہ (ا + ہ) کو مثبت ہونا چاہئے۔

یہ امر غور طلب ہے کہ نیوٹن کے طریقہ میں ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اکثر دو متصلہ صحیح عددوں کا علم حاصل ہوتا ہے جن کے درمیان بڑی سے بڑی اصل واقع ہوتی ہے۔ مثلاً مثال بالا میں چونکہ لا = ۳ کے لئے ف (لا) منفی اور لا = ۴ کے لئے مثبت ہے اسلئے اس مساوات کی بڑی سے بڑی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

**۸۹ ـ سفلی انتہائیں اور منفی اصلوں کی انتہائیں۔** مثبت اصلوں کی سفلی انتہا معلوم کرنا ہو تو مساوات کو اول لا = $\frac{۱}{ما}$ کے ابدال سے تحویل کرنا چاہئے۔ پھر ما میں جو مساوات حاصل ہوگی اس کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا ہ معلوم کرو۔ اسکا متکافی یعنی $\frac{۱}{ہ}$ مطلوبہ سفلی انتہا ہوگی کیونکہ

ما $<$ ہ، $\frac{۱}{ما} > \frac{۱}{ہ}$، یعنے لا $> \frac{۱}{ہ}$،

منفی اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنے کے لئے مجوزہ مساوات کو صرف لا = - ما کے ابدال سے تحویل کرنا ہوگا۔ یہ استحالہ منفی اصلوں کو مثبت اصلوں میں بدلدیگا۔ فرض کرو کہ ما میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصلوں کی علوی اور سفلی انتہائیں ہ اور ہَ ہیں تو مجوزہ مساوات کی منفی اصلوں کی انتہائیں - ہ اور - ہَ ہونگی۔

(87) **۹۰ ـ انتہائی مساواتیں۔** اگر مساوات فَ (لا) = ۰ کی تمام حقیقی اصلیں معلوم ہوسکیں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلونکی

تعداد معلوم کرنا ممکن ہے۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ فَ (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں، مقدار کے لحاظ سے صعودی ترتیب میں، عَ، بَ، جَ،...، لَہ ہیں اور فرض کرو کہ قیمتوں کا حسب ذیل سلسلہ لا کی بجائے ف (لا) میں درج کیا گیا ہے،

− ∞، عَ، بَ، جَ،......، لَ، + ∞

جب ان مقداروں میں سے کسی دو متصلہ مقداروں سے مختلف العلامت نتیجے حاصل ہوں تو ان کے درمیان ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ہوگی اور نتیجہ صریح دفعہ ۱، کی رو سے صرف ایک اصل ہوگی۔ لیکن جب نتیجے ہم علامت ہوں تو اسی نتیجہ صریح کی رو سے اِنکے درمیان کوئی اصل موجود نہیں ہوگی۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مذکورۂ بالا مقداروں کو درج کرنے سے نتیجوں میں ہر علامت کی تبدیلی مجوزہ مساوات کی ایک حقیقی اصل کو مستلزم ہے۔

اگر ف (لا) = ۰ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۱، کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ فَ (لا) = ۰ کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور یہ کہ وہ ایک ایک کرکے فَ (لا) = ۰ کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اسی صورت میں اور اسی مسئلہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فَ (لا) = ۰ اور باقی سب مشتق تفاعلوں کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور ان میں سے کسی تفاعل کی اصلیں اس تفاعل کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں جسکا یہ مشتق ہے۔

اس قسم کی مساواتوں کو جو کسی مجوزہ مساوات کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹی ہوئی ہوں اور جنکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیان واقع ہوں ہم **انتہائی مساواتیں** کہینگے۔

یہ ظاہر ہے کہ نیوٹن کے طریقہ سے اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنیمیں جب ف (لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۸۸ میں تبلائے ہوئے

طریقہ کی بموجب عمل کرنے سے تفاعل ف (لا) خود آخری تفاعل ہوگا جسکو مثبت بنانا ہوگا اور اس لئے جس علوی انتہا پر ہم پہنچتے ہیں وہ بڑی سے بڑی اصل سے عین بعد کا صحیح عدد ہوگا۔

## مثالیں

(88) ۱۔ ثابت کرو کہ ف (لا) = ۰ کے کسی مشتق تفاعل $\text{ف}^{\text{م}}$ (لا) = ۰ کی خیالی اصلیں ف (لا) کی خیالی اصلوں سے زیادہ نہیں ہو سکیں لیکن اس کی حقیقی اصلیں زیادہ ہو سکتی ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مشتق تفاعل میں خیالی اصلوں کا موجود ہونا معلوم ہو تو خیالی اصلوں کی کم از کم اتنی ہی تعداد ابتدائی مساوات میں داخل ہونی چاہیئے۔

۲۔ دفعہ ۹۰ کا طریقہ استعمال کرکے وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{۳} - \text{ق}\ \text{لا} + \text{ر} = ۰$$

کی تمام اصلیں حقیقی ہوں۔

۳۔ اسی طریقہ سے مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\ \text{ق}\ \text{لا} + (\text{ن} - ۱)\ \text{ر} = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

جواب: جب ن جفت ہو تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا کوئی بھی نہیں بموجب اسکے کہ

$$\text{ق}^{\text{ن}} > \text{یا} < \text{ر}^{\text{ن}-۱}$$

جب ن طاق ہو تو تین حقیقی اصلیں ہیں یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$\text{ق}^{\text{ن}} > \text{یا} < \text{ر}^{\text{ن}-۱}$$

۴۔ مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} (\text{لا} - ۱)^{\text{ن}} = ۰$ کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ن واں مشتق

تفاعل معلوم کرکے ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہیں :۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\frac{\text{ن}}{\text{۲ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}} + \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}}{\text{۱}\times\text{۲}} \times \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}}{\text{۲ن(۲ن}-\text{۱)}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}} - \text{وغیرہ} = \text{۰}$$

۵ ۔ اسی طرح $(\text{لا}^{\text{۲}}-\text{۱})^{\text{ن}}$ کا ن واں مشتق معلوم کرکے ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور − ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں :۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}\,\frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}}{\text{۲ن(۲ن}-\text{۱)}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}} + \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)}}{\text{۱}\times\text{۲}} \times \frac{\text{ن(ن}-\text{۱)(ن}-\text{۲)(ن}-\text{۳)}}{\text{۲ن(۲ن}-\text{۱)(۲ن}-\text{۲)(۲ن}-\text{۳)}}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۴}} - \cdots = \text{۰}$$

۶ ۔ اگر مساوات ذیل میں مقادیر ل، م، ن میں سے کسی دو کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دو درجی جسمیں یہ مساوات تحویل ہو جاتی ہے ایک انتہائی مساوات ہے اور ثابت کرو کہ مجوزہ مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہیں :۔

$$(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج}) - \text{ل}^{\text{۲}}(\text{لا}-\text{ا}) - \text{م}^{\text{۲}}(\text{لا}-\text{ب}) - \text{ن}^{\text{۲}}(\text{لا}-\text{ج}) - \text{۲ل م ن} = \text{۰}$$

۷ ۔ مساوات

$$\text{لا}^{\text{۴}} + \text{۴لا}^{\text{۳}} - \text{۲لا}^{\text{۲}} - \text{۱۲لا} + \text{پ} = \text{۰}$$

کی اصلوں کی نوعیت پر پ کی مختلف قیمتوں کے لئے بحث کرو۔

دفعہ ۹ استعمال کرو۔ جب پ، − ۷ سے کم ہو تو دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ جب پ، − ۷ اور ۹ کے درمیان واقع ہو تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ جب پ، ۹ سے بڑا ہو تو تمام اصلیں خیالی ہیں۔ مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی جبکہ پ = − ۷ اور مساوی اصلوں کے دو زوج ہونگے جبکہ پ = ۹۔

(189)

# دسواں باب

## مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

**۹۱**۔ گزشتہ باب کے طریقوں سے ہم وہ حدود معلوم کرسکتے ہیں جن کے درمیان کسی عددی مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ کسی خاص اصل کو عملاً تقریبی طور پر معلوم کرنے سے بیشتر یہ اصل جس وقفہ میں واقع ہوتی ہے اس کو ایسے وقفوں سے علٰحدہ کرلینا ضروری ہے جنمیں باقی دوسری اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس باب میں چند مسئلے بیان کئے جائینگے جنکا مقصد متغیر کی کسی دو اختیاری طور پر مفروضہ قیمتوں کے درمیان مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد متعین کرنا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ مقصد پورا ہوجائے تو نہ صرف حقیقی اصلوں کی کل تعداد معلوم کرنا ممکن ہو جائیگا بلکہ ہم وہ حدود بھی معلوم کرسکینگے جن کے درمیان اصلیں فرداً فرداً واقع ہوتی ہیں اس مقصد کو پیش نظر رکھکر فوریر (Fourier) اور بوڈان (Budan) نے جو مسئلے بیان کئے ہیں وہ اگرچیکہ طرز بیان کا لحاظ کرتے مختلف ہیں لیکن اصول میں مماثل ہیں۔ اس اصول کو سمجھانیکے لئے فوریر کا بیان زیادہ سہولت بخش ہے لیکن عملی طور پر استعمال کرنیمیں بوڈان کے بیان کو ترجیح حاصل ہے۔ سٹرم (Sturm) کا مسئلہ اگرچیکہ عملاً زیادہ محنت طلب ہے لیکن قبل الذکر پر اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس کو استعمال کرنے سے کسی دو مجوزہ مقداروں کے درمیان حقیقی اصلوں کی بالکل ٹھیک تعداد ہمیشہ معلوم ہوجاتی ہے حالانکہ فوریر اور

بوڈان کے مسئلہ سے صرف ایک خاص حد حاصل ہوتی ہے جسکے آگے حقیقی اصلوں کی تعداد مجوزہ وقفہ کے اندر متجاوز نہیں کر سکتی ۔

**۹۲ ۔ فوریر اور بوڈان کا مسئلہ ۔** فرض کرو کہ دو عدد ا اور ب (ا < ب) لا کی بجائے اُس سلسلہ میں درج کئے گئے ہیں جو ف (لا) اور اس کے مشتق تفاعلوں سے بنتا ہے یعنی سلسلہ ذیل میں

ف (لا)، ف₁ (لا)، ف₂ (لا)، ..... فن (لا)

تو حقیقی اصلوں کی تعداد جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں اُس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو سلسلۂ بالا میں علامتوں کی تبدیلیوں کی اُس تعداد کو جو لا کی بجائے ا درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں تبدیلیوں کی اُس تعداد پر ہے جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ۔ اور جب اس وقفہ میں حقیقی اصلوں کی تعداد اس اضافہ سے کم پڑتی ہو تو یہ کمی بقدر ایک جفت عدد کے ہوگی ۔ (190)

یہ وہ شکل ہے جسمیں فوریر اس مسئلہ کو بیان کرتا ہے ۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ جب ہم دو عددوں ا اور ب کا ذکر کرتے ہیں جن میں سے ا چھوٹا ہے تو انمیں سے ایک یا دونوں منفی ہو سکتے ہیں اور مطلب یہ ہوتا ہے کہ ا بہ نسبت ب کے − ∞ سے زیادہ قریب ہے ۔

اب ہم اُن تبدیلیوں کی جانچ کرتے ہیں جو سلسلہ بالا کے تفاعلوں کی علامتوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتی ہیں جب لا کی

قیمت کو ا سے ب تک مسلسل طور پر بڑھتا ہوا فرض کیا جائے۔ حسب ذیل چار مختلف صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:۔

(۱) لا کی قیمت مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک واحد اصل میں سے گذر سکتی ہے۔

(۲) وہ ف (لا) = ۰ میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے گذر سکتی ہے۔

(۳) وہ امدادی تفاعلوں ف م (لا) = ۰ میں سے کسی ایک کی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور یہ اصل ف م-۱ (لا) = ۰ یا ف م+۱ (لا) = ۰ میں سے کسی میں واقع نہیں ہوتی۔

(۴) وہ ف م (لا) = ۰ میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور ف م-۱ (لا) = ۰ میں واقع نہیں ہوتی۔

ذیل میں ہم سہولت کے مدنظر ف (لا) کی بجائے صرف ف سے کام لینگے۔

(۱) پہلی صورت میں دفعہ ۵ ۷ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرنے میں علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ اصل میں سے گذرنیکے عین قبل ف اور ف۱ کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق۔

(۲) دوسری صورت میں ف (لا) = ۰ کی ر مضعفی اصل میں سے گذرنے میں یہ ظاہر ہے کہ علامت کی ر تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں کیونکہ دفعہ ۷۶ کی رو سے گذرنیکے عین قبل تفاعلوں

ف، ف۱، ف۲، ..... ف ر-۱، ف ر

کی علامتیں باری باری سے + اور - یا - اور + ہوتی ہیں

اور گذرنیکے عین بعد سب کی علامتیں وہی ہوتی ہیں جو $ف_{ر}$ کی ہے۔

(191) (۳) تیسری صورت میں $ف_{م}$ (لا) = ۰ کی اصل کو $ف_{م-۱}$ اور $ف_{م+۱}$ میں درج کرنے سے انکی علامتیں یا تو موافق ہونگی یا مختلف۔ فرض کرو کہ دونوں ہم علامت ہیں تو اصل میں سے گذرنے میں علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں کیونکہ گذرنے سے قبل $ف_{م}$ کی علامت ان دونوں موافق علامتوں سے مختلف ہوگی اور گذرنیکے بعد علامت وہی ہوگی (دفعہ ۶، ۷)۔ فرض کرو کہ دونوں مختلف العلامت ہیں تو علامت کی کوئی تبدیلی کم نہ ہوگی کیونکہ اصل میں سے گذرنے سے قبل $ف_{م-۱}$، $ف_{م}$، $ف_{م+۱}$ کی علامتیں ہونی چاہئیں + + - یا - - + اور گذرنیکے بعد یہ علامتیں ہو جاتی ہیں + - - یا - + +، اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ $ف_{م}$ (لا) = ۰ کی اصل میں سے گذرنے میں علامت کے کسی تغیر کا اضافہ نہیں ہو سکتا بلکہ دو تغیرات کم ہو سکتے ہیں۔

(۴) چوتھی صورت میں لا ایسی قیمت میں سے گذرتا ہے (فرض کرو یہ قیمت عہ ہے) جو نہ صرف $ف_{م}$ کو بلکہ $ف_{م+۱}$، $ف_{م+۲}$، ... $ف_{م+ر-۱}$ کو بھی معدوم کر دیتی ہے۔ دفعہ ۶، ۷ کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ اصل میں سے گذرتے وقت علامت کی متعدد تبدیلیاں ہمیشہ کم ہونگی۔ انکی مجموعی تعداد تفاعلوں کے سلسلہ

$$ف_{م-۱}،\ ف_{م}،\ ف_{م+۱}،\ \ldots،\ ف_{م+ر-۱}،\ ف_{م+ر}$$

پر غور کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

حسب ذیل نتیجے بہت آسانی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں :-

(۱) جب $ف_{م-۱}$ (عہ) اور $ف_{م+ر}$ (عہ) ہم علامت ہوں تو

ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،

ر + ۱ تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو ۔

(ب) جب، ف م-۱ (ع) اور ف م+ر (ع) مختلف العلامت ہوں تو

ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،

ر - ۱ تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو ۔

اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ ف م (لا) کی ر ضعفی اصل میں سے گذرتے وقت تبدیلیوں کی جفت تعداد کم ہوجاتی ہے ۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ (۱)، (۲) کی ایک خاص صورت ہے اور (۳)، (۴) کی ایک خاص صورت یعنے جبکہ ر = ۱ ۔ لیکن چونکہ صورتیں (۱) اور (۳) اکثر وقوع پذیر ہوتی ہیں اس لئے ان کو علیحدہ جماعت میں رکھنا ہی بہتر ہے ۔

ثبوت بالا پر نظر ثانی کرنے سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب، لا، ﺍ سے ب تک بڑھتا ہے تو علامت کی کسی تبدیلی کا اضافہ نہیں ہوسکتا
اور یہ کہ ف (لا) = ۰ کی ہر واحد اصل میں سے گذرتے وقت (192)
علامت کی ایک تبدیلی کم ہوتی ہے اور نیز یہ کہ کسی حال میں بھی علامت کی تبدیلیوں کی طاق تعداد کم نہیں ہوسکتی سوائے اس صورت کے جبکہ لا، ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرے ۔ پس ﺍ سے ب تک لا کے کل تغیر میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جو کم ہوتی ہے وہ یا تو اس وقفہ میں ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہونی چاہئے یا اس سے بقدر ایک جفت عدد کے متجاوز ہونی چاہئے۔ اس لئے مسئلۂ بالا ثابت ہوگیا ۔

## ۹۳ — مسئلہ کا استعمال

اِس مسئلہ کو بوڈان نے جس شکل میں بیان کیا ہے وہ جیسا کہ اوپر مذکور ہوا عملی مقاصد کے لئے زیادہ سہولت بخش ہے ۔

چنانچہ بوڈان اسکو یوں بیان کرتا ہے :۔ فرض کرو کہ مساوات ف(لا) = ۰ کی اصلوں کو اول بقدر ا کے اور بعد میں بقدر ب کے گھٹا دیا گیا ہے جہاں ا اور ب کوئی عدد ہیں اور ا، ب سے چھوٹا ہے ۔ تب ا اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو پہلی استحالہ شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو دوسری استحالہ شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد پر ہے۔

فوریر کے بیان میں یہ بات صریحاً شامل ہے کیونکہ یہ دونوں استحالہ شدہ مساواتیں حسب ذیل ہیں (دیکھو دفعہ ۳۴)

$$ف(ا) + ف_۱(ا)\,ما + \frac{ف_۲(ا)}{۱\times۲}ما^۲ + \cdots + \frac{ف_ن(ا)}{۱\times۲\times\cdots\times ن}ما^ن = ۰،$$

$$ف(ب) + ف_۱(ب)\,ما + \frac{ف_۲(ب)}{۱\times۲}ما^۲ + \cdots + \frac{ف_ن(ب)}{۱\times۲\times\cdots\times ن}ما^ن = ۰.$$

دفعہ ماسبق کے نتیجوں کو تسلیم کرنے کے بعد ان مساواتوں سے مسئلہ بالا کی صداقت ظاہر ہے۔

اس شکل میں مسئلہ کے عملی طور پر سہولت بخش ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ہم اصلوں کو گھٹانیکا وہ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو دفعہ ۳۴ میں بتایا گیا ہے۔

## مثالیں

۱ ۔ مساوات

$$لا^{۵} - ۳ لا^{۴} - ۲۴ لا^{۳} + ۹۵ لا^{۲} - ۴۶ لا - ۱۰۱ = ۰$$

کی اصلوں کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم اس تفاعل کی جانچ لا کی اُن قیمتوں کے لئے کرتے ہیں جو وقفوں

- ۱۰، - ۱، ۰، ۱، ۱۰

کے درمیان واقع ہیں۔ اِن عددوں کو صرف اس وجہ سے اختیار کیا گیا ہے کہ عمل حساب میں سہولت پیدا ہو۔ اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے (193)

۱، ۲، - ۲۶، ۱۵، ۶۵، - ۸۷

اصلوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹایا جائے تو عمل حساب کی ابتدا ہی میں یہ ظاہر ہو جاتا ہے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہونگی۔ اس لئے اس صورت میں عمل حساب کی تکمیل کرنے کی ضرورت نہیں۔

اصلوں کو بقدر - ۱۰ اور - ۱ کے گھٹانے میں سہولت اس میں ہے کہ مساوات کی متبادل علامتوں کو بدل کر اصلوں کو بقدر + ۱۰ اور + ۱ کے گھٹایا جائے اور پھر حاصل شدہ نتیجہ میں متبادل علامتوں کو بدلا جائے۔ جب اصلوں کو بقدر - ۱ کے گھٹایا جاتا ہے تو استحالہ شدہ مساوات کے سر حاصل ہوتے ہیں

۱، - ۸، - ۲، ۱۳۹، - ۲۹۱، ۶۰

اصلوں کو بقدر - ۱۰ کے گھٹانے میں گزشتہ کی طرح اثنائے عمل میں ہی ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ استحالہ شدہ مساوات کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یعنی جب متبادل علامتوں کو بدلا جاتا ہے تو وہ باری باری سے مثبت اور منفی ہوتی ہیں۔

اس طرح ہمیں ذیل کا نقشہ ملتا ہے:-

(- ۱۰) + - + - + -،
(- ۱) + - - + - +،
(۰) + - - + - -، (خود مساوات کی علامتیں)

(۱) + + − + + −،

(۱۰) + + + + + +

یہ علامتیں وہ علامتیں ہیں جو ف (لا) اور اس کے مختلف مشتق تفاعل ف$_{1}$، ف$_{2}$، ف$_{3}$، ف$_{5}$ اُسوقت اختیار کرتے ہیں جب مجوزہ عددوں کو لا کی بجائے درج کیا جائے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ ان کو یہاں دفعہ ۹۲ کی ترتیب کی بموجب نہیں بلکہ اس کے بالعکس لکھا گیا ہے یعنی ف$_{5}$، ف$_{4}$، ف$_{3}$، ف$_{2}$، ف$_{1}$، ف۔

نقشہ بالا سے ہم ذیل کے نتیجے اخذ کرتے ہیں:۔ سب اصلوں کو −۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ ایک حقیقی اصل −۱۰ اور −۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ ایک حقیقی اصل −۱ اور صفر کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ صفر اور ۱ کے درمیان کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوتی۔ ۱ اور ۱۰ کے درمیان، چونکہ علامت کی تین تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں، کم از کم ایک حقیقی اصل ہے۔ لیکن باقی دو اصلوں کی نوعیت مشتبہ رہجاتی ہے یا تو وہ خیالی ہیں یا ۱ اور ۱۰ کے درمیان تین حقیقی اصلیں ہیں۔

ہم یہ عمل کر سکتے ہیں کہ مزید استحالوں کے ذریعہ ۱ اور ۱۰ کے درمیانی وقفہ کو تنگ کر کے اسکی جانچ کریں تاکہ دونوں مشتبہ علامتوں کی نوعیت معلوم ہو سکے لیکن یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ اصلیں تقریبًا مساوی ہوں تو اس مقصد کے لئے حسابی اعمال میں بہت زیادہ محنت برداشت کرنی ہو گی۔ فوریر اور بوڈان کے مسئلہ کا یہی نقص ہے۔ دونوں نے اس نقص کو دور کرنے کی کوشش کی ہے اور مشتبہ وقفوں میں اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے طریقے دریافت کئے ہیں لیکن یہ طریقے پیچیدہ ہیں اس لئے ہم ان کو درج نہیں کرتے خصوصًا اس وجہ سے بھی کہ اسٹرم کے مسئلہ سے وہ تمام مقاصد پورے ہو جاتے ہیں جنکے لئے فوریر اور بوڈان نے طریقے ایجاد کئے تھے۔

(194)

۲ــ مساوات

لا$^{۳}$ + لا$^{۲}$ − ۲ لا − ۱ = ۰

کی اصلوں کے محل وقوع معلوم کرو۔

اسکی سب اصلیں حقیقی ہیں اور − ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۴۶)۔جب کبھی کسی مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو فوریر کے تفاعلوں کی علامتوں سے کسی دو مجوزہ صحیح عددوں کے درمیان حقیقی اصلوں کی صحیح تعداد معلوم ہو جاتی ہے ۔ چنانچہ ہم نتیجۂ ذیل حاصل کرتے ہیں :۔ اصلیں وقفوں

(−۲، −۱)، (−۱، ۰)، (۱، ۲)

کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۳ــ مساوات

لا$^{۵}$ + لا$^{۴}$ − ۴ لا$^{۳}$ − ۳ لا$^{۲}$ + ۳ لا + ۱ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

**جواب** :۔ وقفہ (−۲، −۱) میں دو اصلیں اور وقفوں (−۱، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۲) میں سے ہر ایک میں ایک اصل

۴ــ مساوات

لا$^{۴}$ − ۸۰ لا$^{۳}$ + ۱۹۹۸ لا$^{۲}$ − ۱۴۹۳۷ لا + ۵۰۰۰ = ۰

کا تجزیہ کرو۔

اس مساوات میں منفی اصلیں نہیں ہو سکتیں ۔ اصلوں کو متواتر بقدر ۱۰ کے گھٹاؤ یہانتک کہ سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہو جائیں۔ نتیجۂ ذیل حاصل ہوگا :۔

(۰) + − + − + ،

(۱۰) + − + + − ،

(۲۰) + ۰ − + + ،

(۳۰) + + + − + ،

(۴۰) + + + + +

اس طرح صفر اور ۱۰ کے درمیان ایک اصل ہے، ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان ایک اصل، ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان کوئی اصل نہیں۔ ۳۰ اور ۴۰ کے درمیان یا تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا خیالی اصلوں کا ایک زوج۔ تیسری استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر اکائیوں کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوگا کہ دو حقیقی اصلیں موجود ہیں۔ اس عمل سے اصلیں علٰحدہ ہو جائینگی اور (۲، ۳) اور (۴، ۵) کے درمیان انکا واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ پس مجوزہ مساوات کی تیسری حقیقی اصل وقفہ (۳۲، ۳۳) میں واقع ہوتی ہے اور چوتھی، وقفہ (۳۴، ۳۵) میں۔

**۹۴۔ مسئلہ کا استعمال خیالی اصلوں پر۔** اب چونکہ لا جب $-\infty$ سے $+\infty$ تک گذرتا ہے تو علامت کی صرف ن تبدیلیاں کم ہو سکتی ہیں اس لئے اگر یہ یقین کرنیکی وجہ موجود ہو کہ کسی وقفہ میں جسمیں لا کی کوئی حقیقی اصل شامل نہیں ہوتی علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں تو ہم یہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ خیالی اصلوں کا ایک زوج موجود ہے۔ فوریر کا مسئلہ استعمال کرتے وقت اس قسم کے حالات اُسوقت پیدا ہوں گے جب کسی استحالہ شدہ مساوات میں معدوم ہونیوالے سر شامل ہوں۔ کیونکہ ہم دفعہ ۶۷ کے اصول کی مدد سے ایسے سر کی واجبی علامت متعین کر سکتے ہیں جو لا کی اُس قیمت کے عین پیشتر اور عین بعد کی قیمتوں کے جواب میں ہو جس کے اندراج سے یہ سر معدوم ہوتا ہے۔ یہ پورا وقفہ اتنا چھوٹا لینا چاہئے کہ ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل اسمیں شامل نہ ہونے پائے۔ (195)

# مثالیں

۱۔ مساوات

$$\text{ف (لا)} \equiv \text{لا}^4 - 4\,\text{لا}^3 - 3\,\text{لا} + 23 = 0$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم اس تفاعل کا امتحان وقفوں ۰، ۱، ۱۰ کے درمیان کرینگے۔ ابتحالہ شدہ مساواتیں ہونگی

$$\frac{1}{24}\,\text{ف}_4(0)\,\text{لا}^4+\frac{1}{6}\,\text{ف}_3(0)\,\text{لا}^3+\frac{1}{2}\,\text{ف}_2(0)\,\text{لا}^2+\text{ف}_1(0)\,\text{لا}+\text{ف}(0)=0،$$

$$\frac{1}{24}\,\text{ف}_4(1)\,\text{لا}^4+\frac{1}{6}\,\text{ف}_3(1)\,\text{لا}^3+\frac{1}{2}\,\text{ف}_2(1)\,\text{لا}^2+\text{ف}_1(1)\,\text{لا}+\text{ف}(1)=0،$$

$$\frac{1}{24}\,\text{ف}_4(10)\,\text{لا}^4+\frac{1}{6}\,\text{ف}_3(10)\,\text{لا}^3+\frac{1}{2}\,\text{ف}_2(10)\,\text{لا}^2+\text{ف}_1(10)\,\text{لا}+\text{ف}(10)=0،$$

انہیں سے پہلی مساوات خود مجوزہ مساوات ہے۔

دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے حساب لگایا جائے تو سر $\text{ف}_3(1)=0$ اور ہمیں ذیل کا نقشہ ملیگا:۔

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | − | ۰ | − | + | (۰) |
| + | − | − | ۰ | + | (۱) |
| + | + | + | + | + | (۱۰) |

اب ہم ہر اُس سطر کو جس میں صفر سر شامل ہے دو سطروں سے بدل سکتے ہیں۔ ایک اُس قیمت کے جواب میں جو صفر سر پیدا کرنیوالی قیمت سے ذرا چھوٹی ہو اور دوسری اُس قیمت کے جواب میں جو اس سے ذرا بڑی ہو۔ علامتیں دفعہ ۷۶ میں بتلائے ہوئے طریقہ کے بموجب متعین ہونگی۔ یہ یاد رہے کہ اوپر کے نقشہ میں مشتق تفاعلوں کو تعبیر کرنے والی علامتیں دفعہ ۷۶ کی ترتیب کے بالعکس لکھی گئی ہیں۔ اب نقشہ بالا کی صورت وہ ہوگی جو ذیل میں درج ہے جہاں ہ ایک بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے:۔

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | − | + | − | + | ہ − | (۰) |
| + | − | − | − | + | ہ + | |
| + | − | − | − | + | ۱ − ہ | (۱) |
| + | − | − | + | + | ۱ + ہ | |
| + | + | + | + | + | | (۱۰) |

جہاں − ہ اور + ہ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں اس شرط کے تحت متعین ہوئی ہیں کہ وہ سر (جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰)، لا = − ہ کے لئے علامت میں اُس سر سے مختلف ہونا چاہئے جو اس کے عین داہنی جانب ہے اور لا = + ہ کے لئے یہ دونوں علامتیں وہی ہونی چاہیں۔ − ۱ − ہ اور ۱ + ہ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں بھی اسی طرح متعین ہوئی ہیں۔

(198) اب چونکہ وقفہ (− ہ، + ہ) میں علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور چونکہ − ہ اور + ہ کے درمیان کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اس لئے خیالی اصلوں کے ایک زوج کا وجود ثابت ہوگیا۔ ۱ + ہ اور ۰ ۱ کے درمیان علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے اس وقفہ میں یا تو حقیقی اصلوں کا ایک زوج شامل ہے یا خیالی اصلوں کے ایک زوج کا امکان ہے۔ ان میں سے کونسی صورت صحیح ہے یہ مشتبہ ہے۔

۲ــــ اگر متعدد سر معدوم ہوں تو ہم خیالی اصلوں کے متعدد ازواج کا وجود ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ بات ذیل کی مثال سے تشریح ہے:۔

$$لا^{۶} − ۱ = ۰$$

− ہ اور + ہ کے جواب میں علامتیں دفعہ ۷۶ کے مسئلہ کی رو سے یہ ہونگی:ــ

(− ہ) + − + − + − −

(+ ہ) + + + + + + −

پس چونکہ − ہ اور + ہ کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں اور چونکہ صفر سے ذرا چھوٹی قیمت سے صفر سے ذرا بڑی قیمت تک جانے میں علامت کی چار تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اس لئے ہمیں خیالی اصلوں کے دو زوجوں کے وجود کا یقین ہو جاتا ہے۔ باقی دو اصلیں اس صورت میں صریحاً حقیقی ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴۲)

کسی ثنائی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد اس طریقہ سے متعین کیجا سکتی ہے۔

۳ — مساوات

لا^۵ + ۱۰ لا^۳ + لا − ۴ = ۰

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

لا کی ایک چھوٹی منفی قیمت سے اس کی ایک چھوٹی مثبت قیمت تک ہمیں علامتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے:۔

(−۵) + − + − + + − + −

(۰) + ۰ ۰ ۰ ۰ + ۰ + −

(+۵) + + + + + + + + −

اب چونکہ یہاں علامت کی چھ تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے خیالی اصلیں تعداد میں چھ ہیں۔ باقی دو اصلیں دفعہ ۱۴ کی رو سے حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔ منفی اصل −۲ اور −۱ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل صفر اور ایک کے درمیان۔

۴ — مساوات

لا^۶ − ۳ لا^۲ − لا + ۱ = ۰

کا مکمل تجزیہ کرو۔

اس کی دو اصلیں خیالی ہیں۔ جب کبھی (جیسا کہ موجودہ صورت میں) اصلیں چھوٹے حدود کے اندر واقع ہوں تو بقدر ایک کے متواتر گھٹانے میں سہولت ہوگی۔ اس طریقہ سے ہم یہاں صفر اور ایک کے درمیان ایک اصل معلوم کرتے ہیں اور دوسری ۱ اور ۲ کے درمیان۔ منفی اصلوں کو معلوم کرتے وقت ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بقدر −۱ کے گھٹانے میں خود −۱ ایک اصل ہے اور −۱ سے ذرا بڑی قیمت کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتوں کو لکھ لینے سے −۱ اور صفر کے درمیان دوسری منفی اصل کا موجود ہونا معلوم ہوتا ہے۔

۵ — مساوات ذیل کا تجزیہ کرو۔

لا^۵ + لا^۴ + لا^۲ − ۲۵ لا − ۳۶ = ۰

اسکی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ۲ اور ۳ کے درمیان ایک حقیقی اصل ہے اور وقفوں (-۳، -۲) اور (-۲، -۱) کے درمیان دو حقیقی منفی اصلیں ہیں۔

(197) ۹۵ — فوریر اور بوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح:۔ خیالی اصلوں کے وجود کا پتہ لگانیکا وہ طریقہ جو دفعہ ماسبق میں بیان ہوا دوہری علامت کا قاعدہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح کا ایک قانون جو ڈی گوا سے منسوب کیا جاتا ہے فوریر کے مسئلہ کے انکشاف سے پہلے رائج تھا یہ اور ڈیکارٹ کا قانون علامت فوریر کے مسئلہ کے نتائج صریح ہیں جیساکہ ہم اب ثابت کرینگے۔

نتیجہ صریح (۱) ۔خیالی اصلوں کو معلوم کرنیکے لئے ڈی گوا کا قاعدہ۔

اس قاعدہ کو عموماً یوں بیان کیا جاتا ہے:۔ جب کسی مساوات میں ۲ م متواتر رقمیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م ہونگی۔ اور جب ۲ م + ۱ متواتر رقمیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م + ۲ یا ۲ م ہونگی بموجب اسکے کہ جن دو رقموں کے درمیان رقموں کی یہ کمی واقع ہوتی ہے وہ علامت میں موافق یا مختلف ہوں۔

یہ قاعدہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دفعہ ۹۲ (۴) کی طرح، اس بات کی جانچ کریں کہ لا کے ایک چھوٹی منفی قیمت - ہ سے ایک چھوٹی مثبت قیمت + ہ تک جانے میں علامت کی کتنی تبدیلیاں کم ہوتی ہیں —

**نتیجۂ صریح (۲) ۔ ڈیکارٹ کا قانونِ علامت ۔**

تفاعلوں کے سلسلہ ف$_{ن}$ (لا)، ف$_{ن-۱}$ (لا)، ف$_{ن-۲}$ (لا)، ... ، ف$_{۲}$ (لا)، ف$_{۱}$ (لا)، ف (لا) میں لا کی بجائے اگر صفر درج کیا جائے تو علامتیں وہی ہونگی جو مجوزہ مساوات کے سروں ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ..... ، ا$_{ن-۱}$، ا$_{ن}$ کی ہیں لیکن + ∞ درج کیا جائے تو سب علامتیں مثبت ہونگی ۔ فوریر کے مسئلہ میں یہ ثابت ہوا ہے کہ اِن حدود کے درمیان اصلوں کی تعداد یعنے مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی اُس تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی جو صفر سے + ∞ تک گذرنے میں کم ہو جاتی ہیں یعنے علامت کی تبدیلیوں کی اُس تعداد سے جو سلسلہ ا$_{۰}$، ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ..... ، ا$_{ن}$ میں پائی جاتی ہے ۔ مثبت اصلوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون یہی ہے اور منفی اصلوں کے لئے بھی اسی طرح کا قانون حاصل ہوتا ہے اگر ہم منفی اصلوں کو مثبت اصلوں سے بدل دیں ۔

**نتیجۂ صریح (۳) ۔** جب ایک عدد ہ ایسا معلوم ہو جائے جو تفاعلوں ف$_{ن}$ (لا)، ف$_{ن-۱}$ (لا)، ف$_{ن-۲}$ (لا)، ... ، ف$_{۲}$ (لا)، ف$_{۱}$ (لا)، ف (لا) میں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے تو چونکہ + ∞ بھی انمیں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے اسلئے فوریر کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہ اور ∞ کے درمیان کوئی اصل نہیں ہو سکتی یعنے مثبت اصلوں کی ایک علوی حد ہ ہے اور یہی نیوٹن کا مسئلہ ہے (دفعہ ۸۸) ۔

(198) **۹۶ ۔ اسٹرم کا مسئلہ ۔** ہم نے پہلے یہ بتا دیا ہے (دفعہ ۴۷) کہ

کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف, (لا) کا مقسوم علیہ اعظم معمولی جبری طریقوں سے نکال کر مساوات ف (لا) = ۰ کی مساوی اصلوں کو معلوم کرنا کس طرح ممکن ہے۔ اسٹرم نے یہی طریقہ ان امدادی تفاعلوں کو بنانے میں استعمال کیا ہے جن سے کسی مساوات کی اصلوں کو جدا کرنے میں مدد لیجاتی ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف, (لا) کا مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے۔ یکے بعد دیگرے آنیوالے باقی درجہ میں گھٹتے جائینگے یہانتک کہ ہم یا تو ایسے باقی پر پہنچینگے جو اپنے سے عین قبل کے باقی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے یا ایسے باقی پر جس میں متغیر سرے سے شامل ہی نہیں ہوتا یعنی جو عددی ہے۔ موخر الذکر صورت میں مساوی اصلوں کا وجود نہ ہوگا اور قبل الذکر صورت میں جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے مساوی اصلوں کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ اسٹرم کے مسئلہ کو ان دو صورتوں میں تقسیم کر کے ان پر جداگانہ بحث کرنا سہولت بخش ہے۔ ہم اس دفعہ میں اس صورت پر غور کرینگے جس میں مساوی اصلیں موجود نہیں ہوتیں اور دفعہ آئندہ میں مساوی اصلوں کی صورت پر۔ خود عمل کی تکمیل سے یہ بات واضح ہو جائیگی کہ کسی دی ہوئی مثال کو کس جماعت سے متعلق کرنا چاہئے۔

اسٹرم کے امدادی تفاعل وہ باقی نہیں ہیں جو عمل حساب میں خود پیش ہوتے ہیں بلکہ وہ باقی جنکی علامتیں تبدیل کر دی گئی ہوں۔ دو جملوں کا مشترک مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے میں باقیوں کی علامتوں کو بدلنے یا نہ بدلنے سے کوئی ہرج واقع نہیں ہوتا لیکن اسٹرم کے امدادی تفاعل بنانے میں انکی تبدیلی لازمی ہے۔ اس لئے ہم آئندہ یہ فرض کر لینگے کہ ہر باقی کی علامت اس کے مقسوم علیہ ہونے سے پیشتر بدل دی گئی ہے۔ فی الحال اس صورت کو لینے سے جس میں مساوی اصلیں موجود نہ ہوں

اسٹرم کا مسئلہ یوں بیان کیا جا سکتا ہے :-

**مسئلہ :-** فرض کرو کہ ن + ۱ تفاعلوں کے سلسلہ

ف(لا)، ف$_1$(لا)، ف$_2$(لا)، ..... ف$_{ن-1}$(لا)، ف$_ن$(لا)

(199) میں لا کی بجائے کوئی دو حقیقی مقداریں ا اور ب درج کی گئی ہیں جہاں سلسلہ بالا میں دیا ہوا تفاعل ف (لا)، اس کا پہلا مشتق ف$_1$(لا)، اور ف (لا) اور ف$_1$(لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرے آنیوالے باقی (بہ تبدیل علامت) شامل ہیں۔ تب سلسلہ بالا میں علامت کی تبدیلیوں کی وہ تعداد جو لا کی بجائے ا درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور وہ تعداد جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے ان دونوں کا فرق، مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کو جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں ٹھیک طور پر بیان کرتا ہے۔

اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے کے طریقہ سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جس میں ق$_1$، ق$_2$، ........، ق$_{ن-1}$ وہ خارج قسمت ہیں جو مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے ہیں :-

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف}(\text{لا}) = \text{ق}_1\,\text{ف}_1(\text{لا}) - \text{ف}_2(\text{لا}) \\ \text{ف}_1(\text{لا}) = \text{ق}_2\,\text{ف}_2(\text{لا}) - \text{ف}_3(\text{لا}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ف}_{ر-1}(\text{لا}) = \text{ق}_ر\,\text{ف}_ر(\text{لا}) - \text{ف}_{ر+1}(\text{لا}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ف}_{ن-2}(\text{لا}) = \text{ق}_{ن-1}\,\text{ف}_{ن-1}(\text{لا}) - \text{ف}_ن(\text{لا}) \end{array}\right\} \quad (1)$$

ان مساواتوں میں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے طریقہ کا نظریہ شامل ہے ۔کیونکہ پہلی مساوات سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف$_1$ (لا) میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو اسکو ف$_2$ (لا) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہیئے، اور دوسری مساوات سے اسی طرح کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہی جزو ضربی ف$_3$ (لا) میں بھی واقع ہونا چاہیئے، وقس علی ہذا، یہانتک کہ ہم آخری باقی پر پہنچ جائیں جو، ف (لا) اور ف$_1$ (لا) میں مشترک اجزائے ضربی ہونے کی صورت میں، ایسا کثیر الارقام ہوگا جسمیں یہ اجزائے ضربی شامل ہونگے ۔ اس دفعہ میں جہاں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ دئے ہوئے کثیر الارقام اور اس کے پہلے مشتق تفاعل میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں ہے آخری باقی ف$_ن$ (لا) عددی ہوگا۔ مسئلہ کے ثبوت کے لئے اس بات کا مشاہدہ کرنا بھی لازمی ہے کہ زیر بحث صورت میں سلسلہ کے کوئی دو متصلہ تفاعل کوئی مشترک جزو ضربی نہیں رکھتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ہم اسی طرح کے استدلال سے جو اوپر استعمال ہوا مندرجۂ بالا مساواتوں کے ذریعہ یہ ثابت کرسکتے کہ اس جزو ضربی کو ف (لا) اور ف$_1$ (لا) میں بھی موجود ہونا چاہیئے اور ایسی صورت ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے ۔پس لا کے ا سے ب تک جانے میں سلسلہ بالا میں علامت کی جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کا امتحان کرتے وقت

200) ہم وہ صورت خارج کر سکتے ہیں جس میں دو متصلہ تفاعل متغیر کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم ہوتے ہیں چنانچہ وہ مختلف صورتیں جنمیں علامت کی کوئی تبدیلی واقع ہو سکتی ہے ذیل میں درج کیجاتی ہیں:-

(۱) جب 'لا' مجوزہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرے

(۲) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گذرے جو امدادی تفاعلوں

ف، $ف_۱$، $ف_۲$ ..... $ف_{ن-۱}$ میں سے ایک کو صفر بناتی ہے۔

(۳) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گذرے جو سلسلہ

ف، $ف_۱$، $ف_۲$ ..... $ف_{ن-۱}$ میں سے دو یا زیادہ تفاعلوں کو صفر بناتی ہے بشرطیکہ معدوم ہونیوالے دو تفاعل متصلہ نہ ہوں۔

(۱) جب 'لا' مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرتا ہو تو دفعہ ۵، سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ گذرنیکے عین قبل ف (لا) اور $ف_۱$ (لا) مختلف علامتیں رکھتے ہیں اور گذرنیکے عین بعد موافق علامتیں۔

(۲) فرض کرو کہ لا کی قیمت عہ سے مساوات ف (لا) = ۰ پوری ہوتی ہے تو مساوات

$$ف_{ر-۱}(لا) = ق_ر ف_ر(لا) - ف_{ر+۱}(لا)$$

سے

$$ف_{ر-۱}(عہ) = - ف_{ر+۱}(عہ)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا کی اس قیمت سے $ف_{ر-۱}$ (لا) اور $ف_{ر+۱}$ (لا) کی عددی قیمت ایک ہی ہوتی ہے مگر مختلف

علامتوں کے ساتھ ۔ عہ سے ذرا کم قیمت سے ذرا بڑی قیمت تک
گذرنے میں ہم اس وقفہ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ انہیں ف ر-۱ (لا) یا
ف ر+۱ (لا) کی کوئی اصل شامل نہ ہو ۔ اس لئے زیر بحث پورے وقفہ
میں یہ دونوں تفاعل اپنی اپنی علامتیں برقرار رکھتے ہیں ۔ اگر ف ر (لا)
کی علامت نہ بدلے (اور یہ بات اس مستثنےٰ صورت میں واقع ہوگی
جب اصل عہ جفت مرتبہ تکرار پاتی ہو) تو علامتوں کے سلسلہ میں کوئی
تغیر نہ ہوگا ۔ عموماً ف ر (لا) کی علامت بدلیگی لیکن اس سے تینوں
تفاعلوں کے حبٹ میں نہ تو علامت کے کسی تغیر کا اضافہ ہوگا نہ کمی
کیونکہ ف ر-۱ (لا) اور ف ر+۱ (لا) میں علامتوں کا اختلاف ہونے کی وجہ
سے گذرنے کے عین قبل اور عین بعد دونوں صورتوں میں علامت کا
ایک تغیر اور ایک استقلال موجود ہوگا خواہ درمیانی تفاعل ف ر (لا)
کی علامت کچھ بھی ہو ۔ مثلاً اگر گذرنے کے قبل علامتیں + - - ہوں
تو گذرنے کے بعد یہ + + - ہو جائیں گی یعنی ایک تغیر اور
ایک استقلال ایک استقلال اور ایک تغیر میں بدل گئے ہیں
لیکن علامت کے تغیروں کی تعداد میں بحیثیت مجموعی کوئی کمی بیشی
نہیں ہوئی ۔

(۳) پچھلی صورتوں میں استدلال کی بنیاد چونکہ صرف اُن (201)
روابط پر رکھی گئی ہے جو ایک تفاعل کو اس کے متصلہ تفاعلوں کے ساتھ
ہوتے ہیں اور چونکہ یہ روابط موجودہ صورت میں غیر متبدل رہتے
ہیں کیونکہ کوئی دو متصلہ تفاعل باہم معدوم نہیں ہوتے اس لئے ہم
یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ف (لا) معدوم ہونیوالے تفاعلوں میں سے
ایک تفاعل ہو تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اگر
ف (لا) معدوم نہ ہو تو علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ جب 'لا' مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرتا ہے تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور کسی دوسرے حالات کے تحت علامت کی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ اس لئے لا کے ا سے ب تک جانے میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد، ا اور ب کے درمیان مساوات کی اصلونکی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔*

مساوی اصلوں کی صورت پر غور کرنے سے پیشتر ہم اسٹرم کے مسئلہ کو چند سادہ مثالوں سے واضح کرینگے۔ عملاً سہولت اس میں ہے کہ اسٹرم کے تفاعلوں میں لا کی بجائے پہلے – ∞، ۰، + ∞ درج کیا جائے تاکہ منفی اور مثبت اصلوں کی کل تعداد حاصل ہو جائے۔ منفی اصلوں کو جدا کرنیکے لئے اعداد صحیح – ۱، – ۲، – ۳، وغیرہ کو متواتر درج کرنا ہوگا یہانتک کہ ہم علامتوں کے اُس سلسلہ پر پہنچ جائیں جو – ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ مثبت اصلوں کو جدا کرنیکے لئے ہم ۱، ۲، ۳، وغیرہ کا اندراج کرتے ہیں یہانتک کہ علامتونکا وہ سلسلہ حاصل ہو جائے جو + ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

* طالب علم کو یہ معلوم کرنے میں اکثر دقت ہوگی کہ اسٹرم کے سلسلہ میں کم شدہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو کس طرح محفوظ کیا جا سکتا ہے کیونکہ جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ صرف پہلے دو تفاعلوں ف (لا) اور ف، (لا) کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس دقت کو دور کرنے میں اس بات سے مدد مل سکتی ہے کہ جب 'لا' ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ع سے دوسری اصل پہ تک بڑھتا ہے تو اگرچہ علامت کی تبدیلیونکی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا لیکن ف، (لا) اور بعد کے تفاعلوں میں علامتوں کی تقسیم اس طور پر بدلتی ہے کہ ف (لا) اور ف، (لا) کی علامتیں جو لا کے ع میں سے گذرنیکے عین بعد ایک ہی تھیں پہ میں سے گذرنیکے عین قبل پھر مختلف ہو جاتی ہیں۔

# مثالیں

۱ـــ مساوات

فـ (لا) ≡ لا$^{۳}$ − ۲ لا − ۵ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور اِن کا محل وقوع معلوم کرو ـ

یہاں فـ$_{۱}$ (لا) = ۳ لا$^{۲}$ − ۲، فـ$_{۲}$ (لا) = ۴ لا + ۱۵، فـ$_{۳}$ (لا) = −۶۴۳،

لا کی قیمتوں − ∞، ۰، + ∞ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

(− ∞) − + − −

(۰) − − + −

(+ ∞) + + + −

پس صرف ایک حقیقی اصل ہے اور وہ مثبت ہے ـ

پھر لا کی قیمتوں ۱، ۲، ۳ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں (202)

(۱) − + + −،

(۲) − + + −،

(۳) + + + −،

اسلئے یہ حقیقی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے ـ

۲ ـــ مساوات

لا$^{۳}$ − ۷ لا + ۷ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو ـ

ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

فـ$_{۱}$ (لا) = ۳ لا$^{۲}$ − ۷،

فـ$_{۲}$ (لا) = ۲ لا − ۳،

فـ$_{۳}$ (لا) = ۱

اور

+ − + − (∞ −)

+ − − + (۰)

+ + + + (∞ +)

پس تمام اصلیں حقیقی ہیں، ایک منفی اور دو مثبت ۔

نیز ہمیں ذیل کے نتیجے ملتے ہیں :-

+ − + − (۴ −)

+ − + + (۳ −)

+ − + + (۲ −)

+ − − + (۱ −)

+ − − + (۱)

+ + + + (۲)

یہاں − ۴ اور + ۲ سے علامتوں کے وہی سلسلے ملتے ہیں جو − ∞ اور + ∞ سے حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے ہم انہیں پر رک جاتے ہیں ۔ منفی اصل − ۴ اور − ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دو مثبت اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ۔

اس مثال سے فوریر کے مسئلہ پر اسٹرم کے مسئلہ کی فوقیت واضح ہو جاتی ہے ۔

فوریر کے تفاعلوں میں ۱ اور ۲ کے اندراج سے علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے جنکی تصدیق آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے :-

+ + − + (۱)

+ + + + (۲)

اب فوریر کے مسئلہ سے ہم صرف یہ نتیجہ نکالنے کا حق رکھتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہوسکتیں ۔ لیکن اسٹرم کے

مسئلہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو اصلیں ہیں ۔ اگر ان اصلوں کو جدا کرنا مقصود ہو تو ہمیں ف (لا) میں مزید اندراجات کرنے چاہئیں ۔

۴ ـــ مساوات

$$لا^4 - 2 لا^3 - 3 لا^2 + 10 لا - 4 = 0$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع دریافت کرو ۔

مشتق سے جزو ضربی ۲ کو علٰحدہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف_1 (لا) = 2 لا^3 - 3 لا^2 - 3 لا + 5$$ (203)

$$ف_2 (لا) = 9 لا^2 - 27 لا + 11$$

$$ف_3 (لا) = - 8 لا - 3$$

$$ف_4 (لا) = - 1433$$

[ نوٹ :- جیسا کہ مساواتوں (۱) سے واضح ہے اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے میں اسکی اجازت ہے کہ عددی اجزائے ضربی کو داخل یا خارج کیا جائے بالکل اسی طرح جس طرح مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں ۔ لیکن اس بات کا خیال رہے کہ یہ اجزا مثبت ہوں تاکہ باقیوں کی علامتیں بدلنے نہ پائیں ۔ ]

علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے

(- ∞) + − + + −

(۰) − + + − −

(+ ∞) + + + − −

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور ایک منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں حقیقی اصلوں کا مقام معلوم کرنیکے لئے صرف ف (لا) میں مثبت اور منفی اعداد صحیح کو متواتر درج کرنا کافی ہے کیونکہ صرف ایک اصل مثبت اور ایک اصل منفی ہے ۔ اس طریقہ سے ہمیں بہ آسانی یہ معلوم ہو جائیگا کہ منفی اصل ـ ۲ اور ـ ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل

صفر اور ایک کے درمیان ۔

## ۹۷ ۔ اسٹرم کا مسئلہ ۔ مساوی اصلیں ۔ فرض کرو کہ

ف (لا) اور فَ (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے اور حسب سابق متواتر آنیوالے باقیوں کی علامتیں بدل دی گئی ہیں اسٹرم کا آخری تفاعل موجودہ صورت میں عددی نہیں ہوگا کیونکہ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ف (لا) اور فَ (لا) کا ایک مشترک جزو ضربی ایسا ہے جس میں لا شامل ہوتا ہے اور اسلئے یہی وہ آخری تفاعل ہوگا جو متذکرہ صدر عمل سے حاصل ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ تفاعلوں کا سلسلہ ہے

ف (لا)، ف۱ (لا)، ف۲ (لا)، ... ، فر (لا)

اب ف (لا) = ۰ کی ضعفی اصل کے سوا لا جب کسی قیمت میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ماسبق کے نتائج سلسلہ بالا پر بھی صادق آتے ہیں کیونکہ کوئی قیمت سوائے ضعفی اصل کے سلسلہ کے کسی دو متصلہ تفاعلوں کو معدوم نہیں کر سکتی ۔ لیکن جب ' لا ' مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک ضعفی اصل میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ۹۵ کے نتیجہ صریح کی رو سے ف (لا) اور ف۱ (لا) کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہوجاتی ہے اور اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ سلسلہ کے باقی دوسرے تفاعلوں یعنی ف۱، ف۲، ...... ، فر میں علامت کی کسی تبدیلی کا نہ اضافہ ہوتا ہے نہ کمی ۔ فرض کرو کہ ف (لا) کی ایک م ضعفی اصل عہ موجود ہے تو دفعہ ۹۶ کی مساواتوں (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ تفاعلوں ف۱، ف۲، (204)
...... ، فر میں سے ہر ایک میں (لا ـ عہ)$^{م-۱}$ ایک جزو ضربی ہے فرض کرو کہ ان تفاعلوں میں بقیہ اجزائے ضربی علی الترتیب فہ۱، فہ۲، ...... ، فہر ہیں ۔ مذکورہ بالا مساواتوں (۱) کو (لا ـ عہ)$^{م-۱}$ سے تقسیم کرو تو

مساواتوں کا ایک سلسلہ ملیگا جن سے دفعہ ماسبق کے استدلال کو استعمال کرنے سے یہ ثابت ہو جائیگا کہ عہ میں سے گذرنے کی وجہ سے سلسلہ فہ، فہ، ..... فہ میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ، اسلیئے سلسلہ ف، ف، .... ف میں بھی علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ کیونکہ لا جب قیمت عہ-ہ سے قیمت عہ + ہ تک جاتا ہے تو جزو ضربی (لا- عہ)م-۱ کا یہ اثر ہوگا کہ وہ یا تفاعلوں فہ، فہ، ....فہ میں سے سب کی علامتیں بدل دیگا (اگر م- طاق ہو) یا کسی کی نہیں (اگر م-جفت ہو) اور ان سب تفاعلوں کی علامتوں کے بدل جانے سے علامت کے تغیرات کی تعداد نہ گھٹ سکتی ہے نہ بڑھ سکتی ہے۔

پس ہم نے یہ ثابت کردیا کہ لا جب، ف (لا) = ۰ کی ضعفی اصل میں سے گذرتا ہے تو ف اور ف۱ کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور سلسلہ کے کسی دوسرے حصہ میں علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ البتہ یہ بات درست رہتی ہے کہ لا جب ف (لا) = ۰ کی ایک واحد اصل میں سے گذرتا ہے تو حسب سابق علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ اب ہم مساوی اصلوں کی صورت کے لئے اسٹرم کے مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں :-

سلسلہ

ف، ف۱، ف۲، .....، فہ

میں جب، ا اور ب درج کئے جائیں تو علامت کی تبدیلیوں کی تعدادوں کے درمیان فرق، ا اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہوتا ہے جہاں آخری تفاعل فر، ف اور ف۱ کا

مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے اور ہر ضعفی اصل کو صرف ایک مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

# مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^{۴} - ۵\,لا^{۳} + ۹\,لا^{۲} - ۷\,لا + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ف_{۱}(لا) = ۴\,لا^{۳} - ۱۵\,لا^{۲} + ۱۸\,لا - ۷$$

$$ف_{۲}(لا) = لا^{۲} - ۲\,لا + ۱$$

ف₂ (لا)، ف₁ (لا) کو پوری طرح تقسیم کر دیتا ہے۔ پس اس صورت میں اسٹرم کا سلسلہ ف₂ (لا) پر آکر رک جاتا ہے اور اس طرح مساوی اصلوں کے وجود کو ثابت کرتا ہے۔

(205) مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہم تفاعلوں ف، ف₁، ف₂ کے سلسلہ میں لا کی بجائے $-\infty$ اور $+\infty$ درج کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(-\infty)$ | + | − | + |
| $(+\infty)$ | + | + | + |

پس مساوات کی صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ انہیں سے ایک تہری اصل ہے جیسا کہ ف₂(لا) کی شکل سے ظاہر ہے جو $(لا - ۱)^{۲}$ کے مساوی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^{۴} - ۶\,لا^{۳} + ۱۳\,لا^{۲} - ۱۲\,لا + ۴ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

ف$_1$(لا) = ۴لا$^{3}$ − ۱۸لا$^{2}$ + ۲۶ لا − ۱۲

ف$_2$(لا) = لا$^{2}$ − ۳ لا + ۲

ف$_2$(لا) اسٹرم کا آخری تفاعل ہے اور اسلئے مساوات کی مساوی اصلیں موجود ہیں۔

+ − + (−∞)

+ + + (+∞)

صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں اور چونکہ ف$_2$(لا) ≡ (لا − ۱)(لا − ۲)

اصلوں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک دوہری اصل ہے۔

۳ — مساوات

لا$^{5}$ + ۲لا$^{4}$ + لا$^{3}$ − لا$^{2}$ − ۲ لا − ۱ = ۰

کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرو۔

یہاں

ف$_1$ = ۵لا$^{4}$ + ۸لا$^{3}$ + ۳لا$^{2}$ − ۲ لا − ۲

ف$_2$ = ۲لا$^{3}$ + ۷لا$^{2}$ + ۱۲ لا + ۷

ف$_3$ = − لا$^{2}$ − ۶ لا − ۵

ف$_4$ = − لا − ۱

ف$_5$ = ۰

چونکہ ف$_5$ = ۰، ف اور ف$_1$ کا مشترک مقسوم علیہ اعظم لا + ۱ ہے اور ف (لا) کی ایک دوہری اصل −۱ ہے۔ نیز

+ − − + − (−∞)

− − + + + (+∞)

پس دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ اسلئے مساوات کی دوہری اصل کے سوا ایک دوسری حقیقی اصل ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۴ — مساوات

$$\text{لا}^6 - 7\,\text{لا}^5 + 15\,\text{لا}^4 - 40\,\text{لا}^2 + 48\,\text{لا} - 16 = 0$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$\text{ف}_1(\text{لا}) = 6\,\text{لا}^5 - 35\,\text{لا}^4 + 60\,\text{لا}^3 - 80\,\text{لا} + 48$$

$$\text{ف}_2(\text{لا}) = 13\,\text{لا}^4 - 84\,\text{لا}^3 + 192\,\text{لا}^2 - 176\,\text{لا} + 48$$

$$\text{ف}_3(\text{لا}) = \text{لا}^3 - 6\,\text{لا}^2 + 12\,\text{لا} - 8 \equiv (\text{لا} - 2)^3$$

**جواب**:- تین جداگانہ حقیقی اصلیں؛ انمیں سے ایک چوہری اصل

## ۹۸ — اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال — اعلیٰ درجہ کی مساواتونکی (208)

صورت میں اسٹرم کے امدادی تفاعلوں کو محسوب کرنیکا عمل اکثر بہت محنت طلب ہو جاتا ہے۔ اسلئے چند ایسے نکات کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جنکی مدد سے اس محنت میں تخفیف ہونے کا امکان ہے۔

(۱) آخری باقی محسوب کرنے میں جبکہ وہ عددی ہو چونکہ صرف اسکی علامت سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے اس لئے آخری عمل تقسیم سے ہم بچ سکتے ہیں کیونکہ لا کی وہ قیمت جو $\text{ف}_{\text{ن}-1}$ کو معدوم کرتی ہے $\text{ف}_{\text{ن}}$ اور $\text{ف}_{\text{ن}-2}$ کو مختلف العلامت بنا دیتی ہے۔ عموماً بغیر کسی عمل حساب کے یہ بتانا ممکن ہے کہ اگر $\text{ف}_{\text{ن}-1}(\text{لا}) = 0$ کی اصل کو $\text{ف}_{\text{ن}-2}(\text{لا})$ میں درج کیا جائے تو حاصل کی علامت کیا ہو گی۔ چنانچہ دفعہ ۹۶ مثال ۲ میں اگر $\text{ف}_3(\text{لا}) = 0$ کی اصل $-\frac{3}{8}$ کو $9\,\text{لا}^2 - 27\,\text{لا} + 11$ میں لا کی بجائے درج کیا جائے تو حاصل کی علامت صریحاً مثبت ہے، پس $\text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کی علامت منفی ہے اور اس لئے لا کی قیمت $-\frac{3}{8}$ کے جواب میں

ف (لا) کی قیمت -۲۳۴۱ کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں -

(۲) جب کسی طرح سے یہ پہچان لینا ممکن ہو کہ اسٹرم کے تفاعلوں میں سے کسی ایک کی سب اصلیں خیالی ہیں تو کسی اور تفاعل کو اس تفاعل کے آگے محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی کیونکہ ایسا تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ ایک ہی علامت برقرار رکھتا ہے (دفعہ ۱۲ نتیجہ صریح) اور اس لئے اسکی اور اسکے بعد آنیوالے تفاعلوں کی علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کبھی بھی کوئی تغیر وقوع پذیر نہیں ہو سکتا چنانچہ جب دو مقداریں ا اور ب درج کیجاتی ہیں تو تبدیلیوں کی تعداد میں جو فرق ہوتا ہے وہ علامت کے ان تغیرات پر منحصر نہیں ہوتا جو سلسلہ کے اس حصہ میں موجود ہو سکتی ہیں جس میں زیر بحث تفاعل اور اس کے بعد آنیوالے تفاعل شامل ہیں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرنے میں ہمیشہ مناسب یہ ہے کہ جب ہم دو درجی تفاعل (مثلاً $ا لا^۲ + ب لا + ج$) پر پہنچیں تو اس بات کا امتحان کریں کہ $لا^۲$ والی رقم اور مطلق رقم ہم علامت ہونے کی صورت میں (اگر ایسا نہیں ہے تو اصلیں خیالی نہیں ہو سکتیں) آیا شرط $۴ اج > ب^۲$ پوری ہوتی ہے یا نہیں - اگر یہ شرط پوری ہوتی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ اصلیں خیالی ہونگی اور عمل حساب کو آگے بڑھانے کی ضرورت نہیں -

جب تفاعلوں میں سے کوئی ایک کامل مربع ہو تو اس صورت پر بھی اوپر کے نتائج کا اطلاق ہوتا ہے کیونکہ ایسا تفاعل لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے اپنی علامت نہیں بدل سکتا -

## مثالیں

۱- مساوات

$$لا^۴ + ۳لا^۳ + ۷لا^۲ + ۱۰لا + ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو -

ہم معلوم کرتے ہیں

ف$_{۲}$(لا) = − ۲۹ لا$^{۲}$ − ۸٫۷ لا + ۱۴

ف$_{۳}$(لا) = − ۱۰۸۶ لا − ۱۴۸۱

ف$_{۴}$(لا) = −

یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کی وہ قیمت جو مساوات ف$_{۳}$(لا) = ۰ سے حاصل ہوتی ہے اور جو − $\frac{۱}{۲}$ سے بہت چھوٹا فرق رکھتی ہے ف$_{۲}$(لا) کو مثبت بناتی ہے ۔ پس ف$_{۴}$(لا) منفی ہے ۔ مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی ۔ حقیقی اصلیں وقفوں (−۲، −۱)، (−۱، ۰) میں واقع ہوتی ہیں ۔

۲ — مساوات

لا$^{۴}$ − ۴ لا$^{۳}$ − ۳ لا + ۲۳ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

ہم معلوم کرتے ہیں

ف$_{۲}$(لا) = ۱۲ لا$^{۲}$ + ۹ لا − ۸۹

ف$_{۳}$(لا) = − ۴۹۱ لا + ۱۳۷۱

ف$_{۴}$(لا) = −

یہاں ف$_{۳}$(لا) = ۰ سے حاصل ہوتا ہے لا = $\frac{۱۳۷۱}{۴۹۱}$ > $\frac{۱۳۷۱}{۵۰۰}$ > ۲٫۷۴ > $\frac{۵}{۲}$، اور لا = $\frac{۵}{۲}$، ف$_{۲}$(لا) کو مثبت بناتا ہے ۔ اس لئے ف$_{۳}$(لا) کی اصل بھی اس کو مثبت بناتی ہے ۔

مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی ۔ حقیقی اصلیں وقفوں (۲، ۳)، (۳، ۴) میں واقع ہوتی ہیں ۔

۳ — مساوات

۲ لا$^{۴}$ − ۱۳ لا$^{۲}$ + ۱۰ لا − ۱۹ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

یہاں

ف$_1$(لا) = ۴ لا$^{2}$ − ۱۳ لا + ۵ ،

ف$_2$(لا) = ۱۳ لا$^{2}$ − ۱۵ لا + ۳۸

چونکہ ۴ × ۱۳ × ۳۸ > ۱۵$^{2}$ ، ف$_2$(لا) کی اصلیں خیالی ہیں اسلئے ہم اسٹرم کے بقیہ تفاعلوں کو محسوب نہیں کرتے ۔

− ∞ ، ۰ ، + ∞ درج کرنے سے

(−∞) + − +

(۰) − + +

(+∞) + + +

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی ۔

۴ ــ مساوات

ف(لا) ≡ لا$^{5}$ + ۲ لا$^{4}$ + لا$^{3}$ − ۴ لا$^{2}$ − ۳ لا − ۵ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

یہاں ف$_1$(لا) = ۵ لا$^{4}$ + ۸ لا$^{3}$ + ۳ لا$^{2}$ − ۸ لا − ۳

ف$_2$(لا) = ۶ لا$^{3}$ + ۶۶ لا$^{2}$ + ۴۴ لا + ۱۱۹

ف$_3$(لا) = − ۱۱۶ لا$^{2}$ − ۷۵ لا − ۲۲۳

چونکہ ۴ × ۱۱۶ × ۲۲۳ > ۷۵$^{2}$ ، باقی تفاعلوں کو معلوم کرنیکی ضرورت نہیں (208)

− ∞ ، ۰ ، + ∞ درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(−∞) − + − −

(۰) − − + −

(+∞) + + + −

چار اصلیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی مثبت اصل ۔

۵ ــ مساوات

لا$^{4}$ − ۲ لا$^{3}$ − ۷ لا$^{2}$ + ۱۰ لا + ۱۰ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو ۔

جواب : ــ سب اصلیں حقیقی ہیں دو اصلیں وقفوں (۱ − ۲ ، ۳ − ۲)

(۱-، ۰) میں ۱ اور دو اصلیں (۲، ۳) کے درمیان واقع ہوتی ہیں

۶ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{۵} + ۳\,\text{لا}^{۴} + ۲\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۲ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہ معلوم ہو جائیگا کہ عمل حساب دو درجی باقی پر پہنچتے ہی ختم ہو جا سکتا ہے۔

**جواب**:۔ صرف ایک اصل حقیقی ہے وقفہ (۱، ۲) میں۔

۷ ـــ مساوات

$$\text{لا}^{۳} + ۱۱\,\text{لا}^{۲} - ۱۰۲\,\text{لا} + ۱۸۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں

$$\text{ف}_{۲}(\text{لا}) = ۸۵۴\,\text{لا} - ۲۷۵۱$$

$$\text{ف}_{۳}(\text{لا}) = ۴۴۱$$

بعض مثالوں میں جیسا کہ اوپر کی مثال سے ظاہر ہے فوراً یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ ایک تفاعل کی اصل سے اس کے ماقبل تفاعل کی علامت کیا ہو جائیگی۔ ہم نے یہاں $\text{ف}_{۳}(\text{لا})$ کو محسوب کیا اور وہ بہت چھوٹا عدد نکلا حالانکہ $\text{ف}_{۲}(\text{لا})$ کے سروں کی مقدار سے $\text{ف}_{۳}(\text{لا})$ کے لئے اس سے بڑے عدد کی توقع ہو سکتی تھی۔ واقعہ یہ ہے کہ اگر ہم $\text{ف}_{۲}(\text{لا})$ کی اصل کو $\text{ف}_{۱}(\text{لا})$ میں درج کریں تو مثبت حصہ، تقریباً منفی حصہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہمیشہ اس بات کی علامت ہے کہ **مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہیں**۔ موجودہ مثال میں ۳ اور ۴ کے درمیان دو مثبت اصلیں ہیں۔ اس وقفہ کو مزید وقفوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں اصلیں پھر بھی ۳،۲ اور ۳،۳ کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور اس لئے یہ دونوں باہم بہت قریب ہیں۔ حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان جو تسلسل پایا جاتا ہے اسکی یہ دوسری تمثیل ہے (دیکھو دفعات ۷، ۱۸)۔ اگر $\text{ف}_{۳}(\text{لا})$ صفر ہوتا تو یہ دونوں اصلیں مساوی ہوتیں اور اگر وہ چھوٹا منفی عدد ہوتا تو یہ اصلیں خیالی ہوتیں۔

۸ — مساوات

$$لا^{۵} + لا^{۴} + لا^{۳} - ۲\,لا^{۲} + ۲\,لا - ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ دو درجی تفاعل کی اصلیں خیالی ہیں۔

جواب :- ایک حقیقی اصل، (۰، ۱) کے درمیان - چار خیالی اصلیں -

۹ — مساوات (209)

$$لا^{۶} - ۶\,لا^{۵} - ۳۰\,لا^{۲} + ۱۲\,لا - ۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں $ف_{۲}(لا) = ۵\,لا^{۴} + ۲۰\,لا^{۲} + ۷$

اور چونکہ اس کی سب اصلیں خیالی ہیں، عمل حساب یہاں پہنچکر ختم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں، (−۲، −۱)، (۶، ۷) وقفوں میں واقع ہیں۔

۱۰ — مساوات

$$۲\,لا^{۶} - ۱۸\,لا^{۵} + ۶۰\,لا^{۴} - ۱۲۰\,لا^{۳} - ۳۰\,لا^{۲} + ۱۸\,لا - ۵ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہمیں معلوم ہوگا

$$ف_{۲}(لا) = ۵\,لا^{۴} + ۲۲۰\,لا^{۲} + ۱$$

اور عمل حساب یہاں ختم ہو سکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں، وقفوں (−۱، ۰)، (۵، ۶) میں واقع ہیں۔

۱۱ — امتحان کرو کہ کس طرح مساوات

$$۲\,لا^{۳} + ۱۵\,لا^{۲} - ۸۴\,لا - ۱۹۰ = ۰$$

کی اصلیں، اعداد −∞، −۷، ۶، +∞ کے درمیان مختلف وقفوں میں واقع ہوتی ہیں۔

یہاں $ف_{۱}(لا) = لا^{۲} + ۵\,لا - ۱۴$

$ف_{۲}(لا) = ۲۷\,لا + ۴۰$

$ف_{۳}(لا) = +$

مندرجۂ بالا مقداروں کے اندراج سے حاصل ہوگا

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (− ∞) | − | + | − | + |
| (− ۷) | + | ۰ | − | + |
| (۶) | + | + | + | + |
| (+ ∞) | + | + | + | + |

جب کبھی (جس طرح کہ موجودہ مثال میں) کوئی مقدار امدادی تفاعلوں میں سے ایک تفاعل کو صفر بنادے (یہاں ف۲ (لا) = ۰ کو − ۷ پورا کرتا ہے) تو صفر جس صف میں ہے اس میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد شمار کرنے میں صفر کو نظرانداز کیا جاسکتا ہے کیونکہ اسکی ہر جانب کی علامتیں مختلف ہونے کی وجہ سے صف میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوسکتا خواہ معدوم ہونیوالی مقدار کی علامت کونسی بھی فرض کرلیجائے۔ سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ایک اصل، − ∞ اور − ۷ کے درمیان۔ دو اصلیں، − ۷ اور ۶ کے درمیان۔

۱۲ — مساوات

۳ لا^۴ − ۶ لا^۲ − ۸ لا − ۳ = ۰

کا تجزیہ کرو۔

یہاں ف۱ (لا) = ۳ لا^۲ − ۳ لا − ۲

ف۲ (لا) = (لا + ۱)^۲

چونکہ ف۲ (لا) کامل مربع ہے، عمل حساب ختم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں، وقفوں (− ۱، ۰)، (۱، ۲) میں واقع ہیں۔

## ۹۹ — مساوات کی اصلوں کے حقیقی ہونیکی شرطیں۔ (210)

اسٹرم کے تفاعلوں کی تعداد جب اس میں ف (لا)، فَ (لا)، اور ن − ۱ باقیوں کو شامل کیا جائے عام طور پر ن + ۱ ہوگی۔ بعض صورتوں میں مجوزہ مساوات میں چند رقموں کی عدم موجودگی کی وجہ سے چند باقی

موجود نہیں ہونگے ۔ یہ صرف اسوقت واقع ہو سکتا ہے جب مجوزہ مساوات میں خیالی اصلیں ہوں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ لا کے $-\infty$ سے $+\infty$ تک جانے میں تفاعلوں کے سلسلہ میں علامت کی ن تبدیلیوں کا نقصان ہونے کے لئے سب تفاعلوں کا موجود ہونا ضروری ہے ۔ اور مزید برآں یہ سب تفاعل ایک ہی علامت اختیار کریں جبکہ لا = $+\infty$ اور متبادل علامتیں جبکہ لا = $-\infty$ ۔ اب چونکہ مساوات کی پہلی رقم کو ہمیشہ مثبت علامت کے ساتھ لیا جاتا ہے اس لئے کسی مساوات کی سب اصلوں کے حقیقی ہونیکی شرط کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے :- ن ویں درجہ کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونیکے لئے اسٹرم کے تمام باقیوں کے صدر سر جو تعداد میں ن - ۱ ہیں مثبت ہونے چاہئیں ۔

## مثالیں

۱ ـ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

ا لا$^2$ + ۲ ب لا + ج = ۰

کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں ۔

جواب :- ب$^2$ - ا ج > ۰

۲ ـ وہ شرطیں معلوم کرو کہ کعبی

ی$^3$ + ۳ ھ ی + گ = ۰

کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں ۔

جب اس کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ کعبی حسب عام کعبی سے اخذ کیا گیا ہے اسکی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں ۔ اس لئے عام کعبی کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں معلوم کرنے میں مندرجۂ بالا شکل پر بحث کرنا کافی ہے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف}_1(\text{ی}) = \text{ی}^2 + \text{ھ}$$
$$\text{ف}_2(\text{ی}) = -2\,\text{ھ}\,\text{ی} - \text{گ}$$
$$\text{ف}_3(\text{ی}) = -(\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3)$$

[ اِنکو محسوب کرنے میں $\text{ف}_1(\text{ی})$ کو $\text{ف}_2(\text{ی})$ سے تقسیم کرنے سے قبل، $\text{ف}_1(\text{ی})$ کو مثبت جزو ضربی $2\,\text{ھ}^2$ سے ضرب دو۔ ]۔

پس مطلوبہ شرطیں ہیں $\text{ھ}$ منفی اور $\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3$ منفی۔

اِن کو ایک شرط میں بیان کیا جا سکتا ہے یعنے $\text{گ}^2 + 4\,\text{ھ}^3$ منفی، کیونکہ اس سے $\text{ھ}$ کا منفی ہونا لازم آتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۳)۔

۳— چار درجی (211)

$$\text{ی}^4 + 6\,\text{ھ}\,\text{ی}^2 + 4\,\text{گ}\,\text{ی} + \text{ا}^2\,\text{ع} - 3\,\text{ھ}^2 = 0.$$

کے لئے اسٹرم کے باقی محسوب کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$\text{ف}_2(\text{ی}) = -3\,\text{ھ}\,\text{ی}^2 - 3\,\text{گ}\,\text{ی} - (\text{ا}^2\,\text{ع} - 3\,\text{ھ}^2),$$
$$\text{ف}_3(\text{ی}) = -(2\,\text{ھ}\,\text{ع} - 3\,\text{ا}\,\text{ج})\,\text{ی} - \text{گ}\,\text{ع},$$
$$\text{ف}_4(\text{ی}) = \text{ع}^3 - 27\,\text{ج}^2,$$

اِنکو دفعہ ۷۳ کی متماثلہ کی مدد سے آسانی کے ساتھ حاصل کیا جا سکتا ہے $\text{ف}_1$ کو $\text{ف}_2$ سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی $3\,\text{ھ}^2$ سے ضرب دے اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی $\text{ا}^2$ کو جدا کر دو۔ $\text{ف}_2$ کو $\text{ف}_3$ سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی $(2\,\text{ھ}\,\text{ع} - 3\,\text{ا}\,\text{ج})^2$ سے ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی $\text{ا}^2\,\text{ھ}^2$ کو جدا کر دو۔

## ۱۰۰— چار درجی کی اصلوں کے حقیقی ہونیکے لئے شرطیں۔

چوتھے درجہ کی عام جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کو جانچنے کے معیار اسٹرم کے طریقہ سے حاصل کرنے کے لئے دفعہ ماسبق کی مثال ۳ کی

مساوات پر غور کرنا کافی ہے۔ اس مثال میں اسٹرم کے باقیوں میں صدر رقموں کے سروں کی شکلوں کی مدد سے ہم وہ شرطیں حاصل کر سکتے ہیں کہ چار درجی کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔ چنانچہ ان شرطوں کی شکل یہ ہوگی

ھ منفی، ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی، ع$^{3}$ ـ ۲۷ جے$^{2}$ مثبت

ہم دیکھتے ہیں کہ انمیں سے دوسری شرط شکل میں دفعہ ۶۸ کی متناظر شرط سے مختلف ہے۔ ان دونوں شکلوں کو متماثل ثابت کرنیکے لئے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ جب، ھ منفی اور ∆ مثبت ہو تو مزید شرط ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے کے منفی ہونے سے یہ بات لازم آتی ہے کہ ا$^{2}$ ع ـ ۱۲ ھ$^{2}$ منفی ہو اور اس کے بالعکس۔ دفعہ ۳۷ کی متماثلہ سے جو شکل ـ ھ (ا$^{2}$ ع ـ ۱۲ ھ$^{2}$) ≡ ا$^{2}$ (۲ ھ ع ـ ۳ ا جے) میں لکھی گئی ہے یہ امر بالکل واضح ہے کہ جب، ھ اور ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے دونوں منفی ہوں تو ا$^{2}$ ع ـ ۱۲ ھ$^{2}$ بالضرور منفی ہے۔ اس کا عکس ثابت کرنے کے لئے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ جب، ا جے مثبت ہوتا ہے تو ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی ہے کیونکہ ∆ کے مثبت ہونے کی وجہ سے ع مثبت ہے اور جب ا جے منفی ہوتا ہے تو پھر بھی ۲ ھ ع ـ ۳ ا جے منفی ہے کیونکہ نامساواتوں ۱۲ ھ$^{2}$ > ا$^{2}$ ع اور ع$^{3}$ > ۲۷ جے$^{2}$ سے فوراً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ منفی حصہ ۲ ھ ع، مثبت حصہ ـ ۳ ا جے سے بڑا ہے۔

طالب علم کو اسٹرم کے تفاعلوں کی مدد سے ان بقیہ نتیجوں کی تصدیق کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی جو دفعہ ۶۸ کی مختلف صورتوں میں حاصل ہوئے تھے۔ (212)

## مثالیں

ا۔ مساوات

لا$^{4}$ ـ ۱۶ لا$^{3}$ + ۶۹ لا$^{2}$ ـ ۷۰ لا ـ ۴۲ = ۰

کی اصلوں کو جدا کرنے میں بوڈان کا طریقہ استعمال کرو ۔

جواب :۔ اسکی اصلیں وقفوں (-۱، ۰)، (۲، ۳)، (۴، ۵)، (۹، ۱۰) میں ہیں ۔

۲ ۔ مساوات

لا^۴ − ۴ لا^۳ + ۷ لا^۲ − ۶ لا − ۴ = ۰

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو ۔

اس قسم کے چار درجی کا تجزیہ کرنے میں جس کی دو اصلیں صریحاً حقیقی ہیں ہم عمل حساب کو اس وقت ختم کر سکتے ہیں جب اسٹرم کا وہ باقی حاصل ہو جائے جس کی صدر رقم کا سر منفی ہے کیونکہ ایسی صورت میں اصلوں کے دوسرے زوج کو خیالی ہونا چاہئے اور حقیقی اصلوں کے مقامات دی ہوئی مساوات میں اندراج کے ذریعہ آسانی کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں ۔

جواب :۔ دو اصلیں خیالی، دو حقیقی اصلیں وقفوں (-۱، ۰)، (۲، ۳) میں ۔

۳ ۔ اسی طریقہ پر مساوات

لا^۴ − ۵ لا^۳ + ۱۰ لا^۲ − ۶ لا − ۲۱ = ۰

کا تجزیہ کرو ۔

جواب :۔ دو اصلیں خیالی ۔ دو حقیقی، (-۱، ۰)، (۳، ۴) وقفوں میں ۔

۴ ۔ مساوات

لا^۴ + ۳ لا^۳ − لا^۲ − ۳ لا + ۱۱ = ۰

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو ۔

جواب :۔ سب اصلیں خیالی ۔

۵ ۔ اسٹرم کے طریقہ سے مساوات

لا^۵ − ۱۰ لا^۳ + ۶ لا + ۱ = ۰

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور اِن کا محل وقوع دریافت کرو ۔

جواب :۔ سب اصلیں حقیقی ۔ ایک اصل وقفہ (-۴، -۳) میں، دو اصلیں وقفہ (-۱، ۰) میں اور دو مثبت اصلیں وقفوں (۰، ۱)، (۳، ۴) میں ۔

٦ — ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ سب اصلیں حقیقی ہیں :-

$$لا^{۵} - ۵ لا^{۴} + ۵ لا^{۳} - ۵ لا^{۲} - ۵ لا - ۱ = ۰$$

٧ — ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ چار اصلیں خیالی ہیں :-

$$۳ لا^{۵} + ۵ لا^{۳} + ۲ = ۰$$

طالب علم بہ آسانی دیکھ لیگا کہ یہ مثال اور مثال ماسبق ایسی مثالیں ہیں جنمیں ایک جزو ضربی ہے جو اسٹرم کے دو غیر متصل باقیوں میں مشترک ہے۔

٨ — مساوات ذیل کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور اصلوں کی نوعیت کے متعلق مثال ۳ صفحہ ۱۵۲ کے نتیجوں کی تصدیق کرو :-

$$لا^{۵} - ۵ ف لا^{۳} + ۵ ف^{۲} لا + ۲ ق = ۰$$

٩ — ثابت کرو کہ اگر ج کی ایک کے سوا کوئی قیمت ہو تو مساوات (213)

$$ج^{۲} لا^{۴} - ۲ ج^{۲} لا^{۲} + ۲ لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہے۔

١٠ — ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^{۳} - (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}) لا - ۲ ا ب ج = ۰$$

کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ اس کو حل کرو جب مقداروں ا، ب، ج میں سے دو مساوی ہو جائیں۔

١١ — ثابت کرو کہ جب چار درجی

$$ف(لا) \equiv ا لا^{۴} + ۴ ب لا^{۳} + ٦ ج لا^{۲} + ۴ د لا + س$$

کا ایک جزو ضربی تہرا ہو تو اس کو شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے :-

$$ا^{۳} ف(لا) \equiv \{ا لا + ب + \sqrt{- ه}\}^{۳} \{ا لا + ب - ۳\sqrt{- ه}\}$$

١٢ — اسٹرم کے باقیوں کے ذریعہ اُن شرطوں کی تصدیق کرو جنکو پورا ہونا چاہئے جبکہ مثال ماسبق کا چار درجی کامل مربع ہو اور اس صورت میں ثابت کرو کہ

$$ا^3 ف(لا) = \{(ا لا + ب)^2 + ۳ ھ\}^2$$

۱۳ — ثابت کرو کہ جب اسٹرم کے سب تفاعل موجود ہوں تو ان تفاعلوں کی صدر رقموں کے سروں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد مساوات کی خیالی اصلوں کے زوجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

۱۴ — اگر پانچ درجی کے لئے اسٹرم کے باقیوں میں سے پہلے دو کی صدر رقموں کی علامتیں – + ہوں تو ثابت کرو کہ حقیقی اصلوں کی تعداد متعین ہو جاتی ہے۔

**جواب** :- صرف ایک اصل حقیقی۔

۱۵ — اگر ھ اور ج دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں اور یہ کہ انہی شرطوں کے تحت پانچ درجی کی صرف ایک اصل حقیقی ہوتی ہے جب اس کو ثنائی سروں کے ماتحت لکھا جائے۔
(مسٹر ایم۔ رابرٹس، ڈبلن اکزامنیشن پیپرز سنہ ۱۸۸۲ء)

۱۶ — اسٹرم کے مسئلہ کے استعمال میں اگر ایسا تفاعل ملجائے جس کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یا سب کی سب منفی تو ابتدائی مساوات کی مثبت اصلوں کی تعداد اور ان کے محل وقوع کی جانچ اسٹرم کے نچلے تفاعلوں کی مدد کے بغیر کیجا سکتی ہے۔ لیکن اگر ایسا تفاعل ملجائے جس کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں تو ابتدائی مساوات کی منفی اصلوں کی جانچ بھی اسی طریقہ پر کیجا سکتی ہے۔

۱۷ — اگر کسی مساوات ف (لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل کی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں۔ اس کو اسی طرح کے استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۹۶ میں استعمال کیا گیا ہے۔ ک ویں باقی کملہ پر غور کرو اور فرض کرو کہ اسکا درجہ م ہے۔ اور ر م تفاعل جو اسکے بعد آتے ہیں ایک ایسا سلسلہ بناتے ہیں جس میں کوئی دو متصلہ تفاعل باہم معدوم نہیں ہو سکتے۔ جب لا = – ∞ تو انکی علامتیں

باری باری سے مثبت اور منفی ہیں لیکن جب لا = + ∞ تو یہ سب مثبت ہیں اس لئے لا جب − ∞ سے + ∞ تک جاتا ہے تو علامت کی م تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی سوائے اُس صورت کے جبکہ لا مساوات کا = ۰ کی ایک اصل میں سے گذرے۔ پس اس مساوات کی م حقیقی اصلیں ہیں۔

اب چونکہ لا کی وہ قیمت جو کسی تفاعل کو معدوم کرتی ہو دو متصلہ تفاعلوں کو مختلف العلامت بناتی ہے اسلئے آسانی کے ساتھ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کی کوئی مساوات بلحاظ اُس تفاعل کے جو اس کے پیشتر ہے انتہائی مساوات ہے۔

۱۸ — اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک تفاعل ف م (لا) کی حقیقی اصلیں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلوں کی تعداد اور محل وقوع ف م (لا) کے نیچے دیگر تفاعلوں کی امداد کے بغیر متعین ہو سکتے ہیں۔ (214)

فرض کرو کہ ف م (لا) = ۰ کی حقیقی اصلیں مقدار کی ترتیب میں ع، بہ، ...... ، یہ، طہ ہیں اور بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔ لا جب − ∞ سے طہ سے کسی قدر چھوٹی قیمت تک بدلتا ہے تو تفاعل ف م (لا) اپنی علامت نہیں بدل سکتا اور اس لئے ف (لا) = ۰ کی اصلوں کی جانچ کرنے میں جو اِن حدود کے درمیان واقع ہوں ف م (لا) کے بعد آنے والے اسٹرم کے تفاعلوں کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ یہی بات اسوقت صادق آتی ہے جبکہ لا، طہ سے ذرا بڑی قیمت سے لیکر یہ سے ذرا چھوٹی قیمت تک گذرتا ہے۔ اور اسی طرح دوسرے وقفوں کے لئے بھی۔ پس اگر ہم وقفوں (− ∞، طہ)، (طہ، یہ)، ......، (بہ، ع) کی الگ الگ جانچ کریں تو ابتدائی مساوات کی اصلوں کی تعداد جو اِن میں سے ہر ایک میں واقع ہوتی ہے اسٹرم کے نیچے کے تفاعلوں کی مدد کے بغیر متعین کیجا سکتی ہے۔

۱۹ — اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک میں خیالی

اصلیں ہوں تو ابتدائی مساوات میں کم از کم اتنی ہی تعداد خیالی اصلوں کی ہوگی۔
(مسٹر الیف۔ پیرسر)

اس کو مثال ماسبق سے اس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے کہ علامت کی تبدیلیوں کی بڑی سے بڑی تعداد کا امتحان کیا جائے جو ف م (لا) پر ختم ہونیوالے تفاعلوں کے سلسلہ میں کم ہو جاتی ہیں جبکہ لا، ۔∞ سے +∞ تک بدلتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جہانتک اس محدود سلسلہ کا تعلق ہے لا کے ف م (لا) = ۰ کی ہر اصل میں سے گذرنے پر علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہو سکتا ہے۔

۲۰ — مثال ۱۸ کا طریقہ دفعہ ۹۸ مثال ۱ میں استعمال کرو۔

آخری دو اسٹرم کے تفاعلوں کو نظرانداز کرنے سے

ف (لا) ≡ لا^۴ + ۳ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۱۰ لا + ۱،

فَ (لا) ≡ ۴ لا^۳ + ۹ لا^۲ + ۱۴ لا + ۱۰،

ر۱ ≡ ۔ ۲۹ لا^۲ ۔ ۷۸ لا + ۱۴

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ر۱ = ۰ کی اصلیں وقفوں (۔۳، ۔۲) اور (۰، ۱) میں واقع ہوتی ہیں۔ مساوات ف (لا) = ۰ میں دو اصلیں خیالی ہیں کیونکہ ر۱ میں لا^۲ کا سر منفی ہے۔ حقیقی اصلیں اگر کوئی ہوں منفی ہونی چاہئیں۔ مندرجۂ بالا تین تفاعل، وقفوں (۔∞، ۔۳) اور (۔۲، ۰) میں اصلوں کے وجود اور محل وقوع کو متعین کرنے کے لئے کافی ہیں۔ یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی دو حقیقی اصلیں موخرالذکر وقفہ میں واقع ہوتی ہیں۔

بہت سی مثالوں میں اسٹرم کے آخری دو تفاعلوں کو اس طور پر نظرانداز کرنا ممکن ہوگا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو درجی تفاعل کی اصلوں کو ٹھیک طور پر معلوم کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ صرف وہ وقفے دریافت کر لئے جائیں جس میں وہ واقع ہوتی ہیں۔

# گیارہواں باب (215)

## عددی مساواتوں کا حل

۱۰۱ — جبری اور عددی مساواتیں — جبری اور عددی مساواتوں کے حل میں ایک اُصولی فرق ہے۔ قبل الذکر میں نتیجہ کو خالص حرفی نوعیت کے عام ضابطہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ چونکہ ایک اصل کے لئے عام جملہ ہوتا ہے اس لئے بلا امتیاز تمام اصلوں کو تعبیر کرتا ہے۔ اِس جملہ کو ایسا ہونا چاہئے کہ اِس میں سروں کے جو تفاعل شامل ہوتے ہیں اِنکی بجائے اصلوں کے متناظر متشاکل تفاعلوں کو درج کیا جائے تو جذری علامات $\sqrt{}$ ، $\sqrt[3]{}$ سے تعبیر ہونیوالے اعمال قابل عمل ہوجائیں اور جب ان متشاکل تفاعلوں کے جذرالکعب اور جذرالمربع نکالے جائیں تو اصلوں کا یہ جملہ ایک اصل میں تحویل ہوجائے، مختلف اصلیں جذرالمربعوں $\pm\sqrt{}$ ، اور جذرالکعبوں $\sqrt[3]{}$ ، $\text{سہ}\sqrt[3]{}$ ، $\text{سہ}^2\sqrt[3]{}$ کے مختلف اجتماعوں سے حاصل ہونگی۔ اس بیان کی سادہ مثال دفعہ ۵۵ میں دو درجی کے لئے ملیگی۔ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی کے لئے اسی قسم کی مثالیں درج ہیں۔ یہ بھی یاد رہے کہ وہ ضابطہ جو جبری مساوات کی اصل کو تعبیر کرتا ہے اسوقت بھی درست رہتا ہے جب مساوات کے سر خیالی مقداریں ہوں۔

عددی مساواتوں کی صورت میں اصلوں کو ایسے طریقوں سے جو ابھی بیان کئے جائینگے فرداً فرداً معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی ایک اصل کو تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر عموماً یہ ضروری ہے کہ وہ ایک معلومہ وقفہ میں واقع ہونی چاہیئے جس میں کوئی دوسری حقیقی اصل شامل نہ ہو۔

عددی مساواتوں کی حقیقی اصلیں یا تو متوافق ہوسکتی ہیں یا متباین۔ پہلی جماعت میں اعداد صحیح 'کسرات' اور مختتم یا متوالی اعشاریہ جو کسرات
216) میں تحویل ہوسکتی ہیں شامل ہیں۔ دوسری جماعت غیر مختتم اعشاریہ پر مشتمل ہے۔ پہلی جماعت کی اصلیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہوسکتی ہیں اور دوسری جماعت کی اصلوں کو صحت کے کسی درجہ تک تقریباً معلوم کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ایک ایسے مسئلہ سے ابتدا کرینگے جو پہلی جماعت کی اصلوں کی تعیین کو ایسی اصلوں کی تعیین میں تحویل کردیتا ہے جو صرف صحیح عدد ہیں۔

**۱۰۲ — مسئلہ۔ جس مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک ہو اور دوسری رقموں کے سر صحیح اعداد ہوں اس میں کوئی ایسی متوافق اصل نہیں ہوسکتی جو صحیح عدد نہیں ہے۔**

کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ب}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

کی ایک اصل $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ہے جو مختصر ترین شکل میں ایک کسر ہے۔ تب

$$\left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} + \text{ب}_1 \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-1} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}-1} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right) + \text{ب}_{\text{ن}} = 0$$

اس کو $ب^{ن-۱}$ سے ضرب دو تو

$$-\frac{ا^{ن}}{ب} = ب_{۱}ا^{ن-۱} + ب_{۲}ا^{ن-۲}ب + \ldots + ب_{ن-۱}اب^{ن-۲} + ب_{ن}ب^{ن-۱}$$

اب یہ ظاہر ہے کہ $ا^{ن}$، ب سے تقسیم نہیں ہوتا اور مساوات کی بائیں جانب کی ہر رقم ایک صحیح عدد ہے یعنے مختصر ترین شکل کی ایک کسر ایک صحیح عدد کے مساوی ہے جو ناممکن ہے۔ پس مساوات کی اصل $\frac{ا}{ب}$ نہیں ہو سکتی۔ اس لئے اسکی حقیقی اصلیں یا تو صحیح اعداد ہیں یا متباین مقداریں۔

ہر وہ مساوات جس کے سر محدود، کسری یا صحیح عدد ہوں، ایسی شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے جس میں پہلی رقم کا سر ایک اور دوسری ارقام کے سر صحیح عدد ہوں (دیکھو دفعہ ۳۱) پس معمولی استحالہ کی مدد سے متوافق اصلوں کی تعیین بالعموم صحیح عددی اصلوں کی تعیین میں تحویل کیجا سکتی ہے۔

اب ہم نیوٹن کا وہ طریق عمل بیان کرینگے جس سے کسی مساوات کی صحیح عددی اصلیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اس مساوات کے سر سب کے سب صحیح عدد ہوں۔ اس طریقہ کو مقسوم علیہم کا طریقہ کہتے ہیں۔ (241)

## ۱۰۳ — نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$ا_{۰}لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + \ldots + ا_{ن-۱}لا + ا_{ن} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

کی ایک صحیح اصل ھ ہے۔ اس کثیر الارقام کو لا - ھ سے تقسیم کرنیکے بعد فرض کرو کہ خارج قسمت

$$ب_{۰}لا^{ن-۱} + ب_{۱}لا^{ن-۲} + \ldots + ب_{ن-۲}لا + ب_{ن-۱}$$

ہے جس میں ب، $ب_{۱}$، $ب_{۲}$ وغیرہ صریحاً صحیح عدد ہیں۔
دفعہ ۸ کی طرح عمل کرنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$ا = ب ،\quad ا_{۱} = ب_{۱} - ھ ب ،\quad ا_{۲} = ب_{۲} - ھ ب_{۱} ، \ldots\ldots$$

$$ا_{ن-۲} = ب_{ن-۲} - ھ ب_{ن-۳} ،\quad ا_{ن-۱} = ب_{ن-۱} - ھ ب_{ن-۲} ،\quad ا_{ن} = - ھ ب_{ن-۱}$$

اِن میں سے آخری مساوات سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ $ا_{ن}$، ھ سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے اور خارج قسمت ـ $ب_{ن-۱}$ ہے۔ آخر سے دوسری مساوات جو شکل

$$ا_{ن-۱} + \frac{ا_{ن}}{ھ} = - ھ ب_{ن-۲}$$

میں رکھی جا سکتی ہے اس بات کو ثابت کرتی ہے کہ متذکرۂ صدر خارج قسمت اور آخر سے دوسرے سر کا مجموعہ پھر ھ سے پورا پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور خارج قسمت ـ $ب_{ن-۲}$ ہے۔ وقس علیٰ ہذا۔

اس عمل کو جاری رکھا جائے تو آخری خارج قسمت جو اس طریقہ سے حاصل ہوگا ـ ب ہوگا جو ـ ا کے مساوی ہے۔

$ا_{ن}$ کو پوری طرح تقسیم کرنیوالے جتنے صحیح عدد ہیں اُن میں سے جو اصلوں کے حدود کے اندر واقع ہوتے ہیں اُن سب کے ساتھ متذکرۂ بالا عمل کیا جائے تو انہیں سے جو اوپر کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں یعنے جن سے ہر قدم پر صحیح خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اور آخری خارج قسمت ـ ا کے مساوی ہوتا ہے وہ مجوزہ مساوات کی اصلیں ہیں۔ اور وہ جن سے دوران عمل میں کہیں کسری خارج قسمت حاصل ہوتا ہے اصلیں نہیں ہیں۔

جب سر ا = ۱ تو دفعہ ماسبق کے مسئلہ سے ہم یہ جانتے ہیں کہ

اس طریقہ پر متعین کی ہوئی اصلیں سب کی سب مجوزہ مساوات کی متوافق
اصلیں ہیں۔ اگر $ا_۰ \neq ۱$ تو بھی اس عمل سے مساوات کی صحیح اصلیں حاصل (218)
ہو جاتی ہیں لیکن اس طریقہ سے تمام متوافق اصلوں کو متعین کرنے کے لئے
ہمیں مجوزہ مساوات کو پہلے ایسی مساوات میں تحویل کر لینا چاہئے جسمیں
بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا مسر ایک ہو۔

**۱۰۴ ۔ مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال۔** مقسوم علیہم کے طریقہ کو
سہل ترین طرز پر استعمال کرنے کی غرض سے ہم سلسلہ اعمال کو شکل ذیل میں
لکھتے ہیں جو دفعہ ۸ کے متشابہ ہے:-

$ا_ن \quad ا_{ن-۱} \quad ا_{ن-۲} \ldots\ldots ا_۲ \quad ا_۱ \quad ا_۰$

$-ب_{ن-۱} \quad -ب_{ن-۲} \ldots\ldots -ب_۲ \quad -ب_۱ \quad -ب_۰$

---

$-هب_{ن-۲} \quad -هب_{ن-۳} \ldots\ldots -هب_۱ \quad -هب_۰$

دوسری سطر کا پہلا عدد $(-ب_{ن-۱})$، $ا_ن$ کو ه سے تقسیم کرنے سے
حاصل ہوا۔ اس کو $ا_{ن-۱}$ میں جمع کرنا ہوگا تاکہ تیسری سطر کا پہلا عدد
$(-هب_{ن-۲})$ حاصل ہو جائے۔ اسکو ه سے تقسیم کرنا ہوگا تاکہ دوسری
سطر کا دوسرا عدد $(-ب_{ن-۲})$ حاصل ہو۔ اسکو پھر $ا_{ن-۲}$ میں جمع کرنا ہوگا
اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ه ایک اصل ہو تو دوسری سطر میں اس طریقہ سے
حاصل ہونیوالا آخری عدد $-ا_۰$ ہوگا۔

جب اس طریقہ سے ہم یہ ثابت کرنے میں کامیاب ہو جائیں کہ
عدد صحیح ه ایک اصل ہے تو کسی اور مقسوم علیہ کے ساتھ پھر عمل کیا جاسکتا ہے

لیکن یہ عمل ابتدائی سروں $ا_{ن}$، $ا_{ن-۱}$، ... پر نہیں بلکہ دوسری سطر کے مقداروں پر انکی علامتیں بدلکر کرنا چاہئے کیونکہ یہ مقداریں خارج قسمت کے سر ہیں جب ابتدائی کثیر الارقام کو لا - ھ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر کسی مقسوم علیہ سے اثنائے عمل میں کسی منزل پر کسری نتیجہ حاصل ہو تو اس کو فوراً خارج کر دینا چاہئے اور عمل کو روکدینا چاہئے۔

مقسوم علیہ ۱ اور -۱ جو صریحاً $ا_{ن}$ کے ہمیشہ صحیح مقسوم علیہ ہیں اِن کو آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ مقسوم علیہم کے طریقہ کو استعمال کئے بغیر بہت آسانی کے ساتھ معمولی اندراج سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ آیا اِن میں سے کوئی عدد مساوات کی اصل ہے یا نہیں۔

219)

## مثالیں

۱- مساوات

$$لا^{۴} - ۲لا^{۳} - ۱۳لا^{۲} + ۳۸لا - ۲۴ = ۰$$

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

رقموں کو گروہوں میں تقسیم کرنے سے (دفعہ ۸۷) بغیر کسی مشکل کے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اس کی سب اصلیں -۵ اور +۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ ذیل کے مقسوم علیہم ممکنہ اصلیں ہیں:-

-۴، -۳، -۲، ۲، ۳، ۴

ہم ۴ سے شروع کرتے ہیں:-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | -۲ | -۱۳ | ۳۸ | -۲۴ |
| | | ۸ | -۶ | |
| | | -۵ | ۳۲ | |

عمل یہاں رک جاتا ہے کیونکہ -۵، ۴ سے پورا تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۴ اصل

نہیں ہے۔

اب ہم عدد ۳ کے ساتھ عمل کرتے ہیں:-

-۲۴　　۳۸　　-۱۳　　-۲　　۱

-۸　　۱۰　　-۱　　-۱

۳۰　　-۳　　-۳　　۰

پس ۳ ایک اصل ہے۔ ۲ کے ساتھ عمل کرنے میں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہم دوسری سطر کے سروں سے اِنکی علامتیں بدلکر فائدہ اٹھاتے ہیں:-

۸　　-۱۰　　۱　　۱

۴　　-۳　　-۱

-۶　　-۲　　۰

پس ۲ بھی ایک اصل ہے۔ پھر -۲ کے ساتھ عمل کرنے سے

-۴　　۳　　۱

۲

۵

عمل ۵ پر رک جاتا ہے کیونکہ یہ -۲ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ پس -۲ اصل نہیں ہے،
-۳ بھی اصل نہیں ہے کیونکہ یہ -۴ کو تقسیم نہیں کرتا۔
[ہم -۳ کو پہلے ہی خارج کر سکتے تھے کیونکہ وہ تحویل شدہ کثیر الارقام کی مطلق رقم ۸ کو تقسیم نہیں کرتا۔ اِس بات کو پیش نظر رکھنے سے مقسوم علیہم کی تعداد گھٹانے میں اکثر فائدہ ہوتا ہے]

اب ہم آخری مقسوم علیہ -۴ کو لیتے ہیں:- (220)

-۴　　۳　　۱

۱　　-۱

۴　　۰

پس -۴ بھی اصل ہے۔

اِس لئے مساوات کی صحیح اصلیں ہیں ۳، ۲، -۴ اور عمل کی آخری

منزل سے یہ ظاہر ہے کہ جب ابتدائی کثیر الارقام کو ثنائی جملوں لا - ۳، لا - ۲، لا + ۴ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجہ لا - ۱ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے ایک بھی ایک اصل ہے۔ پس ابتدائی کثیر الارقام کو شکل

(لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) (لا + ۴)

میں رکھا جا سکتا ہے۔

۲- مساوات ۳ لا^۴ - ۲۳ لا^۳ + ۳۵ لا^۲ + ۳۱ لا - ۳۰ = ۰

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

اِسکی اصلیں - ۲ اور ۸ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ پس صرف مقسوم علیہم ۲، ۳، ۵، ۶ کو آزمانا ہوگا۔

ہم فوراً معلوم کر لیتے ہیں کہ ۶ اصل نہیں ہے۔

۵ کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

۳  - ۲۳  ۳۵  ۳۱  - ۳۰

- ۳  ۸  ۵  - ۶

۰  - ۱۵  ۴۰  ۲۵

پس ایک اصل ۵ ہے۔ ۳ کے لئے ہم معلوم کرتے ہیں

۳  - ۸  - ۵  ۶

- ۳  - ۱  ۲

۰  - ۹  - ۳

اس لئے ۳ بھی ایک اصل ہے۔ ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ ۲ اصل نہیں ہے۔

ابتدائی کثیر الارقام کو (لا - ۵) (لا - ۳) سے تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت آخری عمل کی رو سے ہے

۳ لا^۲ + لا - ۲

جسکی ایک اصل - ۱ ہے۔ پس مجوزہ مساوات کی تمام صحیح اصلیں - ۱، ۳، ۵ ہیں۔

اس مساوات کی چوتھی اصل $\frac{۲}{۳}$ ہے جو متوافق اصل ہے اور صحیح عدد نہ ہونے کی وجہ سے اوپر کے عمل میں بیان نہیں کی گئی۔

۳ ـــ مساوات

$$لا^{۴} + لا^{۳} - ۲\,لا^{۲} + ۴\,لا - ۲۴ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلوں کے حدود ہیں -۴، ۳

**جواب** :- اصلیں ہیں -۳، ۲، $۲ \pm \sqrt{-۱}$

۴ ـــ مساوات (221)

$$لا^{۴} - ۲\,لا^{۳} - ۱۹\,لا^{۲} + ۶۸\,لا - ۶۰ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں -۶ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ ۲، ۳، -۵ اصلیں ہیں اور آخری تقسیم کے بعد جو جزو ضربی باقی رہ جاتا ہے وہ لا - ۲ ہے۔ پس ۲ دوہری اصل ہے۔ چنانچہ کثیر الارقام

$$(لا - ۲)^{۲}\,(لا - ۳)\,(لا + ۵)$$

کے معادل ہے۔

دفعہ ۱۰۶ میں ضعفی اصلوں کی صورت پر مزید بحث کیجائیگی۔

**۱۰۵ ـــ مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرنیکا طریقہ۔** راست اندراج کے ذریعہ اِس بات کا تَعَیُّن کرنا فی الواقعی ممکن ہے کہ آیا اُن کے کوئی مقسوم علیہم مجوزہ مساوات کی اصلیں ہیں یا نہیں لیکن نیوٹن کے طریقہ کا ایک فائدہ یہ ہے کہ بعض مقسوم علیہم بہت تھوڑی محنت کے بعد خارج کئے جا سکتے ہیں جیساکہ اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے۔ اِس طریقہ کا ایک دوسرا فائدہ بھی ہے جس کو ہم اب بیان کرینگے۔ جب اُن کے مقسوم علیہم کی تعداد اصلوں کے حدود کے اندر بڑی ہو تو اِس طریقہ

تفصیل کے ساتھ استعمال کرنے سے پیشتر اُن مقسوم علیہم کی تعداد کو گھٹانا ضروری ہے جنکو آزمانے کی ضرورت ہے۔ اِس کو حسب ذیل طریقہ سے عمل میں لایا جاسکتا ہے:۔

اگر ف (لا) = ۰ کی ایک صحیح اصل ھ ہے تو جیسا کہ اوپر بتایا گیا ف (لا)، لا ۔ ھ سے پورا تقسیم ہوجاتا ہے اور خارج قسمت کے سر صحیح اعداد ملتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم لا کو کوئی صحیح عددی قیمت دیں اور ف (لا) کی متناظر قیمت کو لا ۔ ھ کی متناظر قیمت سے تقسیم کریں تو خارج قسمت ایک صحیح عدد ہونا چاہیئے۔ سہولت کی خاطر ہم سادہ ترین صحیح اعداد ۱ اور ۔۱ لیتے ہیں اور کسی مقسوم علیہ ھ کو آزمانے سے پیشتر ہم اِس پر یہ شرط عائد کردیتے ہیں کہ ف (۱)، ۱ ۔ ھ سے تقسیم ہوجائے (یا علامت کو بدل دینے سے، ھ ۔ ۱ سے) اور ف (۔۱)، ۔۱ ۔ ھ سے تقسیم پذیر ہوجائے (یا، علامت کو بدلدینے سے، ۱ + ھ سے)۔

اِس نتیجہ کو استعمال کرتے وقت سب سے پہلے ف (۱) اور ف (۔۱) کو محسوب کرنے میں سہولت ہوگی۔ اگر اُن میں سے کوئی ایک معدوم ہوجائے تو متناظر صحیح عدد ایک اصل ہے اور پھر ہم اُس تحویل شدہ کثیر الارقام پر عمل جاری کرینگے جس کے سر اُس نتیجہ کو معلوم کرنے کے عمل میں حاصل ہوتے ہیں جو زیر بحث صحیح عدد کو درج کرنے سے ملتا ہے۔

222 ## مثالیں

۱۔ $\text{لا}^{۵} - ۲۳\,\text{لا}^{۴} + ۱۶۰\,\text{لا}^{۳} - ۲۸۱\,\text{لا}^{۲} - ۲۵۷\,\text{لا} - ۲۴۰ = ۰$

اصلیں ۔۱ اور ۲۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

حسب ذیل مقسوم علیہم حاصل ہوتے ہیں:۔

۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرلیتے ہیں

ف (۱) = - ۸۴۰ ، ف (-۱) = - ۶۴۸

اِس لئے ہم وہ تمام مقسوم علیہم خارج کردیتے ہیں جو، بقدر ایک کے گھٹ جانیکے بعد، ۸۴۰ کو تقسیم نہیں کرتے، اور جو، بقدر ایک کے بڑھجانیکے بعد، ۶۴۸ کو تقسیم نہیں کرتے۔ پہلی شرط ۱۰ اور ۲۰ کو خارج کرتی ہے اور دوسری شرط ۴ اور ۲۲ کو۔ باقی اعداد ۲، ۵، ۸، ۱۱ پر مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ۵، ۸، ۱۱ اصلیں ہیں اور حاصل خارج قسمت لا$^2$ + لا + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام جملہ

(لا - ۵) (لا - ۸) (لا - ۱۱) (لا$^2$ + لا + ۱)

کے معادل ہے۔

۲ — لا$^5$ - ۲۹ لا$^4$ - ۳۱ لا$^3$ + ۳۱ لا$^2$ - ۳۲ لا + ۶۰ = ۰

اصلیں -۳ اور ۳۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

مقسوم علیہم ہیں:-

-۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰

ف (۱) = ۰، اسلئے ایک اصل ۱ ہے۔

ف (-۱) = ۱۲۴ - اوپر کی شرط -۲، ۳، ۳۰ کے سوا سب کو خارج کردیتی ہے۔ آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہو جائیگا کہ -۲ اور ۳۰ اصلیں ہیں اور آخری خارج قسمت لا$^2$ + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام (لا-۱) (لا - ۳۰) (لا+۲) (لا$^2$ + ۱) کے معادل ہے۔

**۱۰۶ — ضعفی اصلوں کی تعیین** ۔ مقسوم علیہم کا طریقہ ضعفی اصلونکی تعیین کرتا ہے جبکہ وہ متوافق ہوں۔ اس طریقہ کو استعمال کرنے میں جب اِن کا کوئی مقسوم علیہ جس کا اصل ہونا معلوم ہو چکا ہے تحویل شدہ کثیر الارقام کی رقم مطلق کا مقسوم علیہ ہو تو ہمیں اس بات کا امتحان کرلینا چاہیئے کہ وہ موخر الذکر کی اصل بھی ہے یا نہیں۔ اگر وہ تحویل شدہ کثیر الارقام کی اصل ہے تو ایسی صورت میں وہ مجوزہ مساوات کی دوہری اصل ہے۔ اگر وہ دوسرے تحویل شدہ

کثیر الارقام کی اصل بھی ہو تو وہ مجوزہ مساوات کی تہری اصل ہے اور علیٰ ہٰذا القیاس
جب کبھی کسی مساوات میں ر مرتبہ تکرار پانیوالی صرف ایک ضعفی اصل ہو تو اس کو اس طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں ف (لا) اور فَ (لا) کا مقسوم علیہ اعظم (لا − عہ)$^{ر-1}$ کی شکل کا ہوگا اور اگر عہ متباین ہو تو اس کے سر متوافق نہیں ہو سکتے ۔

تیسرے، چوتھے اور پانچویں درجوں کی مساواتوں کی ضعفی اصلیں ایسے (23)
مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے عمل کی مدد کی بغیر پوری طرح معلوم کیجا سکتی ہیں جیسا کہ ذیل کے مشاہدات سے واضح ہو جائیگا :۔

(۱) کعبی ۔ اس صورت میں ضعفی اصلوں کو متوافق ہونا چاہئیے کیونکہ اسکا درجہ اتنا بڑا نہیں ہے کہ دو جدا جدا اصلیں تکرار پا سکیں ۔

(۲) چار درجی ۔ اس صورت میں یا تو ضعفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل ایک کامل مربع ہے ۔ کیونکہ چار درجی کی وہ شکل جس میں دو جدا جدا اصلیں تکرار پا سکتی ہیں صرف یہ ہے ۔

(لا − عہ)$^2$ (لا − بہ)$^2$

یعنے ایک دو درجی کا مربع ۔ چار درجی کی اصلیں متباین ہو سکتی ہیں ۔ اسلئے اگر یہ معلوم ہو جائے کہ چار درجی کی اصلیں متوافق نہیں ہیں تو ہمیں یہ دیکھ لینا چاہئیے کہ آیا وہ کامل مربع ہے تاکہ مساوی متباین اصلوں کا تعین ہو سکے ۔

(۳) پانچ درجی ۔ اس صورت میں یا تو ضعفی اصلیں متوافق ہیں یا یہ تفاعل دو جملوں کا حاصل ضرب ہے ، ایک خطی متوافق جزو ضربی اور دوسرا ایک دو درجی کا مربع ۔ کیونکہ دو مختلف اصلوں کے تکرار پا سکنے کے لئے تفاعل کو شکلوں

(لا − عہ)$^2$ (لا − بہ)$^2$ (لا − جہ) ، (لا − عہ)$^2$ (لا − بہ)$^3$

میں سے کوئی نہ کوئی شکل اختیار کرنی چاہئیے ۔ موخر الذکر شکل میں اصلیں متباین نہیں ہو سکتیں ۔ لیکن قبل الذکر ایسی صورت کا جواب ہو سکتی ہے

جس میں ایک متوافق جزو ضربی ایک دو درجی کے مربع سے مضروب ہو جسکی اصلیں متباین ہیں ۔ اس طرح اگر پانچ درجی میں متوافق اصلوں کا غیر موجود ہونا معلوم ہو جائے تو اسکی اصلیں ضعفی نہیں ہو سکتیں ۔ اگر اس میں صرف ایک متوافق اصل پائی جائے تو اس بات کا امتحان کرلینا چاہئے کہ آیا باقی ماندہ جزو ضربی کامل مربع ہے ۔ اگر اسمیں ایک سے زیادہ متوافق اصلیں ہوں تو ضعفی اصلیں متوافق اصلوں میں ملینگی ۔

## مثالیں (224)

۱— ۲ لا$^{۳}$ − ۳۱ لا$^{۲}$ + ۱۱۲ لا + ۶۴ = ۰

کی تمام متوافق اصلیں معلوم کرو ۔

اصلیں حدود − ۱، ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔ مقسوم علیہم ۲، ۴، ۸ ہیں ۔

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۲ | ۳۱− | ۱۱۲ | ۶۴ |
| −۲ | ۱۵ | ۸ | |
| ۰ | ۱۶− | ۱۲۰ | |

اسلئے ۸ ایک اصل ہے ۔ اب تحویل شدہ مساوات پر عمل کرو

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۱۵ − | ۸ − |
| ۲ − | ۱ − | |
| ۰ | ۱۶ − | |

۸ پھر ایک اصل ہے اور باقی ماندہ جزو ۲ لا + ۱ ہے ۔

**جواب :-** ف (لا) ≡ (۲ لا + ۱) (لا − ۸)$^{۲}$

۲— لا$^{۴}$ − لا$^{۳}$ − ۳۰ لا$^{۲}$ − ۷۶ لا − ۵۶ = ۰

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو ۔

اصلیں حدود − ۶، ۱۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔ (دفعہ ۰، ۸ مثال ۱۰ کا طریقہ استعمال کرو)

**جواب :-** ف (لا) ≡ (لا + ۲)^۳ (لا - ۷)

۳ — ۹ لا^۴ - ۱۲ لا^۳ - ۱۷ لا^۲ - ۴۰ لا + ۱۶ = ۰

کی متوافق اور ضعفی اصلیں دریافت کرو ۔

اصلیں حدود -۲، ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔

مساوات جس شکل میں ہے اس میں صحیح اصلیں نہیں ہیں ۔ لیکن پھر بھی اِسکی اصل متوافق ہو سکتی ہے ۔ اِس کو جانچنے کے لئے اصلوں کو ۳ سے ضرب دو تاکہ لا^۴ کا سر ایک ہو جائے ۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۱۷ لا^۲ - ۱۲۰ لا + ۱۴۴ = ۰

اب اصلیں حدود -۶، ۱۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔

اسکی ایک دوہری اصل -۴ ہے اور تفاعل (لا^۲ - ۱۲ لا + ۹) (لا + ۴)^۲ کے معادل ہے ۔ اس لئے ابتدائی مساوات

(لا^۲ - ۴ لا + ۱) (۳ لا + ۴)^۲ = ۰

کے مماثل ہے ۔

۴ — لا^۴ + ۱۲ لا^۳ + ۳۲ لا^۲ - ۲۴ لا + ۴ = ۰

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو ۔

(225) اصلیں -۱۲ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں ۔ اِسلئے قابل امتحان مقسوم علیہم صرف -۴، -۲، -۱ ہیں ۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی کوئی اصل متوافق نہیں ہے ۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آیا دیا ہوا تفاعل کامل مربع ہے تفاعل کا جذرالمربع نکالنے سے یا مثال ۳ صفحہ ۳۱۸ کی شرطوں کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہو سکتا ہے ۔ چنانچہ یہ لا^۲ + ۶ لا - ۲ کا مربع ہے (مثال ۱ صفحہ ۲۴۱) پس دی ہوئی مساوات مساوی اصلوں کے دو زوج رکھتی ہے اور دونوں متباین ہیں ۔

۵ — ف (لا) ≡ لا^۵ - لا^۴ - ۱۲ لا^۳ + ۸ لا^۲ + ۲۸ لا + ۱۲ = ۰

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو ۔

اصلوں کے حدود -۴، ۴ ہیں ۔

مساوات کی ایک اصل −۳ ہے اور تحویل شدہ مساوات ہے

$$\text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} + ۸\,\text{لا} + ۴ = ۰$$

اور کوئی دوسری متوافق اصل موجود نہیں ہے۔ اِسلئے ضعفی اصلوں کا امکان صرف اِس صورت میں ہے جبکہ یہ بعد کا تفاعل کامل مربع ہو۔ چنانچہ یہ معلوم ہوجاتا ہے کہ وہ کامل مربع ہے اور

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۲)^{۲}(\text{لا} + ۳)$$

۶ — $\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{۵} - ۸\,\text{لا}^{۴} + ۲۲\,\text{لا}^{۳} - ۲۶\,\text{لا}^{۲} + ۲۱\,\text{لا} - ۱۸ = ۰$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (\text{لا}^{۲} + ۱)(\text{لا} - ۲)(\text{لا} - ۳)^{۲}$

۷ — ذیل کی مساوات میں صرف دو مختلف اصلیں ہیں۔ اِنکو معلوم کرو۔

$$\text{لا}^{۵} - ۱۳\,\text{لا}^{۴} + ۶۷\,\text{لا}^{۳} - ۱۷۱\,\text{لا}^{۲} + ۲۱۶\,\text{لا} - ۱۰۸ = ۰$$

عموماً یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک صحیح اصل ھ دو مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں $\text{ھ}^{۲}$ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے اور آخر سے دوسرے سر میں ھ۔ اگر اصل تین مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں $\text{ھ}^{۳}$، آخر سے دوسرے سر میں $\text{ھ}^{۲}$، اور آخر سے تیسرے سر میں ھ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے۔ یہاں آخری سر = $۲^{۲} \times ۳^{۳}$۔ پس اگر نہ تو −۱ اور نہ ۱ اصل ہو تو اصلیں ۲ اور ۳ ہونی چاہئیں۔ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ ہوسکتی ہے کہ یہ دونوں فی الحقیقت اصلیں ہیں۔

۸ — مساوات

$$۸۰۰\,\text{لا}^{۴} - ۱۰۲\,\text{لا}^{۲} - \text{لا} + ۳ = ۰$$

میں مساوی اصلیں ہیں اِن کو معلوم کرو۔

اس مثال میں مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے پیشتر اصلوں کو اِن کے متکافیوں میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوگی۔

جواب :- $\text{ف}(\text{لا}) \equiv (۱۰\,\text{لا} - ۳)(۵\,\text{لا} - ۱)(۴\,\text{لا} + ۱)^{۲}$

**۱۰۷ — نیوٹن کا تقرب کا طریقہ** ۔ یہ بتادینے کے بعد کہ مساواتوں کی متوافق اصلیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں اب ہم متباین اصلوں کی تقریبی قیمتیں حاصل کرنے کے بعض طریقے بیان کرتے ہیں ۔ تقرب کا وہ طریقہ جو عام طور پر نیوٹن[1] سے منسوب کیا جاتا ہے اور جو اس دفعہ کا موضوع
(226) ہے اس لحاظ سے قابل قدر ہے کہ اس کو ماورائی تفاعلوں پر مشتمل عددی مساواتوں میں اور ان مساواتوں میں جنہیں صرف جبری تفاعل شامل ہوتے ہیں یکساں طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے ۔ اگرچہ موخرالذکر جماعت کے تفاعلوں کی صورت میں عملی مقاصد کے مدنظر ہارنر کے طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے تاہم اصول میں دونوں طریقے بڑی حد تک مماثل ہیں ۔ ہارنر کا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دفعات آئندہ میں واضح کیا جائیگا ۔

تقرب کے تمام طریقوں میں جس اصل کو ہم تلاش کرتے ہیں اسکی متعلق یہ فرض کرلیا جاتا ہے کہ وہ دوسری اصلوں سے جدا کرلیگئی ہے اور تنگ حدود کے درمیان معلومہ وقفہ کے اندر واقع ہے ۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ف (لا) = ۰ ہے اور قیمت ا معلوم ہے جو مساوات کی ایک اصل سے بقدر ایک چھوٹی مقدار ھ کے فرق رکھتی ہے ۔ اب چونکہ مساوات کی اصل ا + ھ ہے اسلئے ف (ا + ھ) = ۰ یعنی

$$\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}'(\text{ا})\,\text{ھ} + \frac{\text{ف}''(\text{ا})}{۲ \times ۱}\,\text{ھ}^{۲} + \dots\dots = ۰$$

اب چونکہ ھ چھوٹا ہے اسلئے ھ کی ایک سے بڑی تمام قوتوں کو نظرانداز کردینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

[1] دیکھو نوٹ (ب) کتاب کے آخری حصہ میں ۔

ف (ا) + فَ (ا) ه = ٠

جس سے

ه = − ف (ا) / فَ (ا)

یعنے مطلوبہ اصل کی پہلی تقریبی قیمت ہے

ا − ف (ا) / فَ (ا)

اس قیمت کو ب سے تعبیر کرو اور پھر وہی عمل جاری کرو تو قریب تر تقریبی قیمت

ب − ف (ب) / فَ (ب)

حاصل ہوگی ۔

اس عمل کو دُہرانے سے صحت کے کسی درجہ تک تقریبی قیمت معلوم کیجا سکتی ہے ۔

# مثال

مساوات لا^۳ − ۲ لا − ۵ = ٠

کی مثبت اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرو ۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے (مثال ا دفعہ ۹۶) ۔ حدود کو تنگ کرنے سے اصل کا ۲ اور ۲٫۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے ۔ ہم ۲٫۱ کو وہ مقدار لیتے ہیں جو ا سے تعبیر کیجاتی ہے ۔ یہ مقدار اصلی قیمت ا + ه سے ٫۱ سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتی ۔ آسانی کے ساتھ ہم معلوم کرتے ہیں

ف (ا) / فَ (ا) = ف (۲٫۱) / فَ (۲٫۱) = ٫٠٦١ / ١١٫٢٣ = ٠٫٠٠٥۴٣

(327)

اسلئے پہلا تقریب ہے

۲۶۰۹۴۶ = ۰۶۰۰۵۴۳ − ۲۶۱

اسکو ب قرار دینے سے اور کسر $\frac{\text{ف (ب)}}{\text{فَ (ب)}}$ کو محسوب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ب} - \frac{\text{ف (ب)}}{\text{فَ (ب)}} = ۲۶۰۹۴۵۵۱۴۸$$

جو دوسرا تقریب ہے۔ وقس علی ہذا۔

نیوٹن کے طریقہ میں عام طور پر تقریب کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے لیکن جس اصل کو ہم تلاش کر رہے ہیں اس کے ساتھ ہی جب دوسری اصل تقریباً اسکے مساوی ہوتی ہے تو کسر $\frac{\text{ف (ا)}}{\text{فَ (ا)}}$ کا چھوٹا ہونا ضروری نہیں کیونکہ تقریباً مساوی اصلوں میں سے کسی ایک کی قیمت، فَ (لا) کو ایک چھوٹی مقدار میں تحویل کردیتی ہے۔ ایسی صورت میں خاص خاص پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے اس طریقہ کی تفصیلی بحث میں ہم پڑنا نہیں چاہتے اس وجہ سے کہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کا طریقہ کہیں زیادہ مفید و کارآمد ہے جو اب بیان کیا جائیگا۔

## ۱۰۸ — عددی مساواتوں کو حل کرنیکے لئے ہارنر کا طریقہ۔

اس طریقہ سے متوافق اور متباین دونوں اصلیں معلوم ہوسکتی ہیں۔ اسمیں اصل کو ہندسہ بہ ہندسہ دریافت کیا جاتا ہے، پہلے اصل کا صحیح حصہ (اگر کوئی ہو) اور پھر اعشاری حصہ حاصل کرتے ہیں یہانتک کہ اصل اگر متوافق ہو تو پوری طرح اور اگر متباین ہو تو اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک معلوم ہو جائے۔ یہ عمل جذر المربع اور جذر الکعب نکالنے کے عمل کے متشابہ ہے جو فی الحقیقت موجودہ طریقہ سے دو درجی اور کعبی مساواتوں کے عام حل معلوم کرنے کی خاص صورتیں ہیں۔

ہارنر کے طریقہ کا خاص اصول یہ ہے کہ دی ہوئی مساوات کی

اصلوں کو دفعہ ۳۴۳ میں بیان کردہ طریقہ کی بموجب بقدر معلومہ مقداروں کے
متواتر گھٹایا جاتا ہے۔ اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ متواتر استحالات
مختصر حسابی شکل میں پیش نظر ہو جاتے ہیں اور اصل ایک مسلسل عمل سے
اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک صحیح صحیح حاصل ہو جاتی ہے۔

اصلوں کو گھٹانے کا اصول اس دفعہ میں سادہ مثالوں کے ذریعہ
(228) واضح کیا جائیگا اور دفعات آئندہ میں چند اور اصول بیان کئے جائینگے جنکی
مدد سے اس طریقہ کے عملی استعمال میں بہت کچھ سہولت پیدا ہو سکتی
ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

۲ لا$^{۳}$ − ۸۵ لا$^{۲}$ − ۸۵ لا − ۸۷ = ۰

کی مثبت اصلیں معلوم کرو۔

جب کوئی عددی مساوات حل کرنے کے لئے تجویز ہو تو پہلا کام یہ ہوگا
کہ اصل کا پہلا عدد معلوم کیا جائے۔ چند آزمائشوں سے یہ عدد معلوم ہو سکتا ہے
اگرچہ بعض صورتوں میں اصلوں کو جدا کرنے کے وہ طریقے استعمال کرنے ہونگے
جو دسویں باب میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثال بالا میں صرف ایک اصل
مثبت ہو سکتی ہے اور یہ ۴۰ اور ۵۰ کے درمیان واقع ہے۔ پس اصل کا
پہلا عدد ۴ ہے۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ۴۰ کے گھٹاتے ہیں۔ استحالہ شدہ مساوات
کی ایک اصل صفر اور ۱۰ کے درمیان ہوگی۔ امتحان کرنے سے اس کا ۳ اور
۴ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ اب ہم استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو
بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں جس کا اثر یہ ہوگا کہ مجوزہ مساوات کی اصلیں بقدر ۴۳
کے گھٹ جائینگی۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱ کے
درمیان ہوگی۔ اس آخری مساوات کی اصلوں کو بقدر ٫۵ کے گھٹانے سے
یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسکی مطلق رقم صفر ہو جاتی ہے یعنی مجوزہ مساوات کی

اصلوں کو بقدر ۴۳،۵ کے گھٹانے سے اسکی مطلق رقم صفر میں تحویل ہوتی ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات کی ایک اصل ۴۳،۵ ہے۔ حسابی اعمال کا سلسلہ ذیل میں ظاہر کیا جاتا ہے :-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۸۵- | ۸۵- | ۸۷- | (۴۳،۵ |
| | ۸۰ | ۲۰۰- | ۱۱۴۰۰- | |
| | ۵- | ۲۸۵- | ۱۱۴۸۷- | |
| | ۸۰ | ۳۰۰۰ | ۹۵۹۴ | |
| | ۷۵ | ۲۷۱۵ | ۱۸۹۳- | |
| | ۸۰ | ۴۸۳ | ۱۸۹۳ | |
| | **۱۵۵** | **۳۱۹۸** | ۰ | |
| | ۶ | ۵۰۱ | | |
| | ۱۶۱ | **۳۶۹۹** | | |
| | ۶ | ۸۷ | | |
| | ۱۶۷ | ۳۷۸۶ | | |
| | ۶ | | | |
| | ۱۷۳ | | | |
| | ۱ | | | |
| | ۱۷۴ | | | |

شکستہ خط ہر استحالہ کے اختتام کی علامت ہے اور جلی ہندسوں میں لکھے ہوئے اعداد متواتر استحالہ شدہ مساواتوں کے سر ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ مثلاً

$$۲\,لا^{۳} + ۱۵۵\,لا^{۲} + ۲۷۱۵\,لا - ۱۱۴۸۷ = ۰$$

وہ مساوات ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴۰ کے (229)
چھوٹی ہیں اور جس کی مثبت اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اگر دوسری استحالہ شدہ مساوات کی بالکل ٹھیک اصل ۵، نہ ہوتی بلکہ (فرض کرو) ۵، اور ۶، کے درمیان واقع ہوتی تو مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے تین ہندسے

۵ء ۳ ۴ ہوتے اور چوتھا ہندسہ معلوم کرنیکے لئے اصلوں کو بقدر ۵ء کے گھٹانا پڑتا اور علی ہذالقیاس۔

۲۔ مساوات

$$۴ لا^{۳} - ۱۳ لا^{۲} - ۳۱ لا - ۲۷۵ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

ہم پہلے حسابی عمل لکھ لیتے ہیں اور پھر اسکے متعلق کچھ بحث کرینگے:-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (۶ء۲۵ | ۲۷۵ - | ۳۱ - | ۱۳ - | ۴ |
| | ۲۱۰ | ۶۶ | ۲۴ | |
| | ۶۵ - | ۳۵ | ۱۱ | |
| | ۵۱ء۳۹۲ | ۲۱۰ | ۲۴ | |
| | ۱۳ء۶۰۸ - | ۲۴۵ | ۳۵ | |
| | ۱۳ء۶۰۸ | ۱۱ء۹۶ | ۲۴ | |
| | ۰ | ۲۵۶ء۹۶ | ۵۹ | |
| | | ۱۲ء۱۲ | ء۸ | |
| | | ۲۶۹ء۰۸ | ۵۹ء۸ | |
| | | ۳ء۰۸ | ء۸ | |
| | | ۲۷۲ء۱۶ | ۶۰ء۶ | |
| | | | ء۸ | |
| | | | ۶۱ء۴ | |
| | | | ء۲ | |
| | | | ۶۱ء۶ | |

آزمایش سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مجوزہ مساوات کی مثبت اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس لئے اصل کا پہلا ہندسہ ۶ ہے۔ اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاؤ۔ استحالہ شدہ مساوات

$$لا^{۳} + ۵۹ لا^{۲} + ۲۴۵ لا - ۶۵ = ۰$$

کی اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ امتحان کرنے سے اسکا ۲، اور ۳، کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلیئے مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے دو ہندسے ۲، ۶ ہیں۔ پھر اصلوں کو بقدر ۲، کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل ۰.۵، ہوگی۔ پس مجوزہ مساوات کی مطلوبہ اصل ۶،۲۵ ہے۔

عمل میں سہولت و آسانی پیدا ہوگی اگر علامت اعشاریہ سے اجتناب کیا جائے چنانچہ اس سے بچنے کی ترکیب یہ ہے:۔ جب اصل کا اعشاریہ حصہ (فرض کرو ....ج ب ا د) نمودار ہونیکو ہو تو متناظر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیدو یعنے پہلی انتصابی قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب ایک صفر لگاؤ، دوسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب دو صفر، تیسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب تین صفر، اور علیٰ ہذا القیاس اگر قطاریں تعداد میں زیادہ ہوں (اور یہ بات فی الواقعی ہوگی جب دی ہوئی مساوات تیسرے درجہ سے بڑے درجہ کی ہو) اب استحالہ شدہ مساوات کی اصل ....ج ب ا د نہیں بلکہ ....ج ب د، ا ہوگی۔ اصلوں کو بقدر ا کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل ....ج ب، د ہوگی۔ پھر اس مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دو تو اصل ہو جائیگی ....ج د ب اور پھر وہی عمل جاری

230) کرو۔ اس اصول کو واضح کرنیکی خاطر ہم اوپر کے حسابی عمل کو علامات اعشاریہ حذف کرکے دہراتے ہیں:۔

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (۶،۲۵ | -۲۷۵ | -۳۱ | -۱۳ | ۴ |
| | ۲۱۰ | ۶۶ | ۲۴ | |
| | -۶۵۰۰۰ | ۳۵ | ۱۱ | |
| | ۵۱۳۹۲ | ۲۱۰ | ۲۴ | |
| | -۱۳۶۰۸۰۰۰ | -۲۴۵۰۰ | ۳۵ | |
| | ۱۳۶۰۸۰۰۰ | ۱۱۹۶ | ۲۴ | |
| | ۰ | ۲۵۶۹۶ | ۵۹۰ | |
| | | ۱۲۱۲ | ۸ | |
| | | ۲۶۹۰۸۰۰ | ۵۹۸ | |
| | | ۳۰۸۰۰ | ۸ | |
| | | ۲۷۲۱۶۰۰ | ۶۰۶ | |
| | | | ۸ | |
| | | | ۶۱۴۰ | |
| | | | ۲۰ | |
| | | | ۶۱۶۰ | |

آئندہ تمام مثالوں میں یہ اختصار اختیار کیا جائیگا۔

۳ — مساوات

$$۲۰\,لا^{۳} - ۱۲۱\,لا^{۲} - ۱۲۱\,لا - ۱۴۱ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

اصل کا ۷ اور ۸ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے اس کی شکل ہے ... ب ا، ۷۔ اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹانے اور ۱۰ سے ضرب دینے سے حاصل ہونیوالی مساوات ہے

$$۲۰\,لا^{۳} + ۲۹۹۰\,لا^{۲} + ۱۱۲۵۰۰\,لا - ۵۷۰۰۰ = ۰$$

اسکی مثبت اصل .... ب ا، ہے اور چونکہ یہ اصل صریحاً صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اسلئے ا = ۰ اور اسلئے اصل کے اعشاری حصہ میں ہم پہلا ہندسہ صفر لکھتے ہیں اور پھر دوسرے استحالہ کو عمل میں لانے سے پیشتر اصلوں کو ۱۰ ضرب دیتے ہیں۔ اس طور پر استحالہ شدہ مساوات کی اصل کا ۵ کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ جواب :— ۷،۰۵

اوپر کی مثالوں میں اصل بہت جلد ختم ہو گئی ہے یعنے صرف تین ہندسوں کے بعد۔ لیکن جب عمل حساب طول طویل ہو اور متواتر آنیوالے ہندسوں کو اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا ضروری ہو تو یہ کام بہت محنت طلب ہو جائیگا۔ اس محنت سے تھوڑی بہت نجات ملسکتی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہوگا۔ ہارنر کے طریقہ کے اہم ترین عملی فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اصل کے دوسرے یا تیسرے (بعض اوقات صرف پہلے) ہندسہ کے بعد خود استحالہ شدہ مساوات سے صرف آزمائش کے ذریعہ بعد کے ہندسہ کا علم ہو جاتا ہے۔ اس اصول کو اب واضح کیا جائیگا۔

**۱۰۹ — آزمائشی مقسوم علیہ کا اصول۔** دفعہ ۱۰۷ میں ہم نے (231)
یہ دیکھا ہے کہ جب کسی مساوات کو لا کی بجائے ا + ھ درج کر کے مستحیل کیا جاتا ہے جہاں ا ایسا عدد ہے جو صحیح اصل سے بقدر ھ کے (جو بلحاظ ا کے چھوٹا ہے) فرق رکھتا ہے تو ھ کی تقریبی قیمت

ف (ا) کو فَ (ا) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اب ہارنر کے طریقہ میں متواتر آنیوالی استحالہ شدہ مساواتیں اُس قسم کے استحالوں کا نتیجہ ہوتی ہیں جنمیں آخری سر ف (ا) اور آخر سے دوسرا سر فَ (ا) ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۳)۔ پس عمل کی دو یا تین منزلیں طے ہونیکے بعد جبکہ اصل کا باقی حصہ معلوم شدہ حصہ کے ساتھ چھوٹی نسبت رکھے تو آخری استحالہ شدہ مساوات کے آخری سر کو آخر سے دوسرے سر سے تقسیم کرنے سے اصل کے مزید دو یا تین ہندسے صحیح طور پر حاصل ہونے کی ہم اُمید کر سکتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو ہارنر کے طریقہ میں عمل کے کسی منزل پر اصل کا مزید تقرب حاصل کرنے کی خاطر نیوٹن کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ہارنر کے طریقہ میں یہ اصول اسوقت استعمال کیا جاتا ہے جب اصل کے معلوم شدہ ہندسوں کے بعد آنے والے ہندسہ کا پتہ لگانا مقصود ہو۔ ہر استحالہ شدہ مساوات کے آخر سے دوسرے سر کو ہم آزمایشی مقسوم علیہ کے نام سے موسوم کرینگے۔ مثلاً دفعہ ماسبق کی دوسری مثال میں عدد ۵ کا پتہ آزمایشی مقسوم علیہ ۲۶۹۰۸۰۰ سے صحیح طور پر لگ جاتا ہے۔ اس مثال میں پہلی استحالہ شدہ مساوات کے آزمایشی مقسوم علیہ سے اصل کا دوسرا ہندسہ بھی ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے اگرچیکہ بالعموم ایسا نہیں ہوتا۔ طالب علم کو استحالہ شدہ مساوات کے صدر (Leading) سروں کے ممکن اثر کا اندازہ لگانا ہوگا۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ ان رقموں کا اثر کم سے کم تر ہوتا جائیگا جیسے جیسے اصل کے ہندسے یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات لا$^3$ + لا$^2$ + لا − ۱۰۰ = ۰

کی مثبت اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے کہ اصل ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ ہم عمل حساب لکھ لیتے ہیں اور پھر اس پر تنقید کرینگے:۔

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (۴٫۲۶۴۴) ۱۰۰۰- | ۱ | ۱ | ۱ | (232) |
| ۸۴ | ۲۰ | ۴ | | |
| ۱۶۰۰۰- | ۲۱ | ۵ | | |
| ۱۱۹۲۸ | ۳۶ | ۴ | | |
| ۴۰۷۲۰۰۰- | ۵۷۰۰ | ۹ | | |
| ۳۷۸۸۳۷۶ | ۲۶۴ | ۴ | | |
| ۲۸۳۶۲۴۰۰۰- | ۵۹۶۴ | ۱۳۰ | | |
| ۲۵۶۰۷۱۷۴۴ | ۲۶۸ | ۲ | | |
| ۲۷۵۵۲۲۵۶- | ۶۲۳۲۰۰ | ۱۳۲ | | |
| | ۸۱۹۶ | ۲ | | |
| | ۶۳۱۳۹۶ | ۱۳۴ | | |
| | ۸۲۳۲ | ۲ | | |
| | ۶۳۹۶۲۸۰۰ | ۱۳۶۰ | | |
| | ۵۵۱۳۶ | ۶ | | |
| | ۶۴۰۱۷۹۳۶ | ۱۳۶۶ | | |
| | ۵۵۱۵۲ | ۶ | | |
| | ۶۴۰۷۳۰۸۸ | ۱۳۷۲ | | |
| | | ۶ | | |
| | | ۱۳۷۸۰ | | |
| | | ۴ | | |
| | | ۱۳۷۸۴ | | |
| | | ۴ | | |
| | | ۱۳۷۸۸ | | |
| | | ۴ | | |
| | | ۱۳۷۹۲ | | |

پہلے اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹاؤ۔ اب چونکہ اعشاری حصہ ظاہر ہونے کو ہے

اس لیئے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب صفر لگاؤ۔ سر ۱۳۰، ۵۷۰۰ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے اس لئے ہم یہ امید کر سکتے ہیں کہ آزمایشی مقسوم علیہ سے اصل کے دوسرے ہندسہ کا پتہ ملسکتا ہے۔ اس بات کا خیال رہے کہ ہر صورت میں جس ہندسہ کو اصل کے حصہ کے طور پر ہم اختیار کر رہے ہونگے وہ ایسا بڑے سے بڑا عدد ہونا چاہیئے جو استحالہ کے عمل میں مطلق رقم کی علامت کو تبدیل نہیں کرتا۔ یہاں ایسا عدد ۲ ہے۔ استحالہ شدہ مساوات

$$لا^{۴} + ۱۳۰\ لا^{۲} + ۵۷۰۰\ لا - ۱۶۰۰۰ = ۰$$

کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے میں مطلق رقم اپنی علامت برقرار رکھتی ہے (۲۔۷۔۴) اگر ہم ہندسہ ۳ کو اختیار کرتے تو مطلق رقم مثبت ہو جاتی جو اس بات کی علامت ہے کہ ہم اصل سے آگے ہو گئے ہیں۔ ہمیں اس بات کی احتیاط رکھنی چاہیئے کہ پہلے استحالہ کے بعد (اس قید کا سبب مثال آئندہ میں نظر آئیگا) مطلق رقم پورے عمل میں اپنی علامت برقرار رکھے۔ اگر ہم نے سہواً بہت چھوٹا ہندسہ اختیار کیا ہے تو خطا خود ظاہر ہو جائیگی جیسا کہ معمولی تقسیم یا جذر نکالنے کے عمل میں ہوا کرتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں اس کے بعد آنیوالا ہندسہ ۹ سے بڑا ہوگا۔ ایسی غلطی ہونیکا احتمال بالعموم بہت کم ہے۔ لیکن ایسی خطا کثرت سے واقع ہوتی ہے جو ضرورت سے بڑے ہندسہ کے لینے میں سرزد ہوتی ہے اور اس خطا کا پتہ مطلق رقم کی علامت بدلجانے سے (283)
چل جائیگا۔ اوپر کے عمل حساب میں پانچویں استحالہ کو کام میں لائے بغیر یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ حل کا پانچواں ہندسہ ۴ ہے چنانچہ مطلوبہ اصل اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک ۴،۲۶۴۴ ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^{۴} + ۴\ لا^{۳} - ۴\ لا^{۲} - ۱۱\ لا + ۴ = ۰$$

کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے ۔ اسکی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (۱٫۶۳۳۶۹) ۴ | -۱۱ | -۴ | ۴ | ۱ |
| -۱۰ | ۱ | ۵ | ۱ | |
| -۶۰۰۰۰ | -۱۰ | ۱ | ۵ | |
| ۵۰۹۷۶ | ۷ | ۶ | ۱ | |
| -۹۰۲۴۰۰۰۰ | -۳۰۰۰ | ۷ | ۶ | |
| ۷۲۶۹۰۵۶۱ | ۱۱۴۹۶ | ۷ | ۱ | |
| -۱۷۵۴۹۴۳۹۰۰۰۰ | ۸۴۹۶ | ۱۴۰۰ | ۷ | |
| ۱۵۲۱۳۱۰۵۲۰۱۶ | ۱۴۸۰۸ | ۵۱۶ | ۱ | |
| -۲۳۳۶۳۳۳۷۹۸۴ | ۲۳۳۰۴۰۰۰ | ۱۹۱۶ | ۸۰ | |
| | ۹۲۶۱۸۷ | ۵۵۲ | ۶ | |
| | ۲۴۲۳۰۱۸۷ | ۲۴۶۸ | ۸۶ | |
| | ۹۳۵۶۰۱ | ۵۸۸ | ۶ | |
| | ۲۵۱۶۵۷۸۸۰۰۰ | ۳۰۵۶۰۰ | ۹۲ | |
| | ۱۸۹۳۸۷۳۳۶ | ۳۱۲۹ | ۶ | |
| | ۲۵۳۵۵۱۷۵۳۳۶ | ۳۰۸۷۲۹ | ۹۸ | |
| | ۱۸۹۷۶۶۴۸۸ | ۳۱۳۸ | ۶ | |
| | ۲۵۵۴۴۹۴۱۸۲۴ | ۳۱۱۸۶۷ | ۱۰۴۰ | |
| | | ۳۱۴۷ | ۳ | |
| | | ۳۱۵۰۱۴۰۰ | ۱۰۴۳ | |
| | | ۶۳۱۵۶ | ۳ | |
| | | ۳۱۵۶۴۵۵۶ | ۱۰۴۶ | |
| | | ۶۳۱۹۲ | ۳ | |
| | | ۳۱۶۲۷۷۴۸ | ۱۰۴۹ | |
| | | ۶۳۲۲۸ | ۳ | |
| | | ۳۱۶۹۰۹۷۶ | ۱۰۵۲۰ | |
| | | | ۶ | |
| | | | ۱۰۵۲۶ | |
| | | | ۶ | |
| | | | ۱۰۵۳۲ | |
| | | | ۶ | |
| | | | ۱۰۵۳۸ | |
| | | | ۶ | |
| | | | ۱۰۵۴۴ | |

34) پانچویں استحالہ کی تکمیل کے بغیر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اصل کا پانچواں ہندسہ ۹ ہے۔ اس لئے اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک اصل کی قیمت ہے ۱،۱۶۳۶۹

دوسرے استحالہ کے بعد سے آزمائشی مقسوم علیہ موثر ہو جاتا ہے چنانچہ اس سے عدد ۳ ٹھیک طور پر معلوم ہوتا ہے۔ اور پھر اصل کے دیگر ہندسے بھی۔ پہلی استحالہ شدہ مساوات کی آخری دو رقمیں منفی ہیں۔ اس لئے ہم اس بات کی اُمید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے قبل کے سروں کا اثر آزمائشی مقسوم علیہ کی بہ نسبت زیادہ ہونا چاہئے جیسا کہ اس صورت میں یہ امر واقعہ ہے۔ ہندسہ ۶ جو اصل کا دوسرا ہندسہ ہے اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا چاہئے۔ ہمیں اس بات کی تعئین کرنی ہوگی کہ مساوات

$$\text{لا}^{4} + 80\,\text{لا}^{3} + 1400\,\text{لا}^{2} - 3000\,\text{لا} - 60000 = 0$$

کی اصل کا صفر اور ۱۰ کے درمیان محل وقوع کیا ہے۔ چند آزمائشوں سے معلوم ہو جائیگا کہ ۶ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ۷ سے مثبت۔ پس اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہے اور ۶ وہ ہندسہ ہے جس کی ہمیں جستجو ہے۔ اس کے بعد کے ہندسوں کے لئے ہم وہ بڑے سے بڑے ہندسے ۳، ۶، ۹ لیتے ہیں جو مطلق رقم کی منفی علامت کو تبدیل نہیں کرتے۔ پہلے استحالہ میں اصلوں کو بقدر ایک کے گھٹانے میں مطلق رقم کی علامت بدلجاتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم صفر اور ایک کے درمیان والی اصل سے گذر چکے ہیں کیونکہ صفر سے مثبت نتیجہ ۴ حاصل ہوتا ہے اور ایک سے منفی نتیجہ ۶۔ باقی تمام استحالوں میں جب تک کہ ہم اصل کے نیچے رہتے ہیں مطلق رقم کی علامت وہی ہونی چاہئے جو ایک کے اندراج سے حاصل ہوتی ہے اور یہ فی الحقیقت اس بات کا فرض کر لینا ہے کہ کوئی اصل ایک اور اس ہندسہ کے درمیان واقع نہیں ہوتی جس کی ہمیں تلاش ہے۔ یہ مفروض سوال کی عبارت سے ہی ظاہر ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں مثبت ہیں۔ ان میں سے ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے اور اسلئے صرف ایک ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔

اگر ہارنر کے طریقہ میں متصلہ حدود کے اندر دو اصلیں موجود ہوں یعنی اگر مساوات کی اصلوں کا ایک زوج تقریباً مساوی ہو تو چند پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے جنکو کسی آئندہ دفعہ میں بیان کیا جائیگا۔

۳۔ مثال ماسبق کی وہ اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ ۱۰ سے ضرب دیکر اپنے عمل کی ابتدا کرو تو سر ہونگے

۱ ، ۴۰ ، −۲۰۰ ، −۱۱۰۰۰ ، ۴۰۰۰۰

چونکہ صدر سر متقابلاً چھوٹے ہیں اس لئے آزمائشی مقسوم علیہ فوراً موثر ہو جاتا ہے۔ مطلق رقم کی مثبت علامت پورے عمل میں برقرار رہنی چاہئے

جواب :- ۰٫۳۳۷۲

۴۔ مساوات

$$لا^{۴} - ۳لا^{۲} + ۷۵لا - ۱۰۰۰۰ = ۰$$

کی وہ اصل اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کرو جو ۹ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے

[ $لا^{۳}$ کا صفر سر شامل کرو ] جواب :- ۹٫۸۸۶

ابتک جن مثالوں پر غور کیا گیا ہے اِن میں اصل کو اعشاریہ کے صرف چند مقامات تک معلوم کیا گیا تھا۔ اب ہم ایسا طریقہ بیان کرینگے جس کی مدد سے تین یا چار اعشاریہ کے مقامات تک اصل کو اوپر کے طریقہ سے معلوم کرنیکے بعد متعدد اور ہندسے ایک مختصر عمل سے بہت آسانی کے ساتھ ٹھیک طور پر حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

۱۱۰ ـــ **ہارنر کے عمل کا اختصار** ـ اجمالی تقسیم کے معمولی عمل میں (235)
جب دئے ہوئے ہندسے ختم ہو جاتے ہیں تو یکے بعد دیگرے آنیوالے مقسوموں کو صفر لگانے کی بجائے ہم مقسوم علیہ کے ہندسوں کو یکے بعد دیگرے سیدھی طرف سے کاٹتے جاتے ہیں اس طور پر کہ خود مقسوم علیہ چند منزلوں کے بعد جو اس کے ہندسوں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہیں ختم ہو جاتا ہے

اس طور پر جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ اصلی خارج قسمت سے صرف آخری ہندسہ میں یا زیادہ سے زیادہ آخری دو ہندسوں میں فرق رکھیگا۔ ہارنر کے اجمالی عمل میں بھی یہی اصول ہے۔ ہم صرف وہ ہندسے برقرار رکھتے ہیں جو نتیجہ کو تقرب کے مطلوبہ درجہ تک حاصل کرنے میں موثر ہوں۔ جب اجمالی عمل شروع ہوتا ہے تو استحالہ شدہ مساوات کے متواتر سروں کو قبل الذکر طریقہ پر صفر لگانے کی بجائے ہم آخر سے دوسرے سر کے سیدھی طرف والے ایک ہندسہ کو، آخر سے تیسرے سر کے سیدھی طرف والے دو ہندسوں کو، آخری سے چوتھے سر کے سیدھی طرف والے تین ہندسوں وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔ اس کا اثر یہ ہوگا کہ عمل میں اہم ہندسے اپنی اپنی خاص جگہ پر قائم رہینگے اور غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جائینگے۔

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ ذیل کی مثالوں میں سے پہلی مثال میں اجمالی طریقہ سے حاصل کئے ہوئے پہلے استحالہ کا مقابلہ اس متناظر استحالہ کے ساتھ کرے جو دفعہ ماسبق کی دوسری مثال میں مکمل طور پر حاصل کیا گیا ہے۔ تب اسکو معلوم ہو جائیگا کس طرح صدر ہندسے (یعنے وہ ہندسے جو نتیجہ کے حاصل کرنے میں اہم ترین حصہ لیتے ہیں) دونوں صورتوں میں منطبق ہوتے ہیں اور اپنے اضافی مقامات برقرار رکھتے ہیں حالانکہ غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جاتے ہیں۔

اس اختصار کے علاوہ جو اوپر بیان ہوا ہارنر کے عمل کے دیگر اختصاروں کی بھی بعض اوقات سفارش کیجاتی ہے لیکن ہم انکا ذکر کرنا اس وجہ سے ضروری نہیں سمجھتے کہ ان سے بہت کم فائدہ حاصل ہوتا ہے اور نیز غلطی کے احتمالات بڑھ جاتے ہیں۔ متذکرہ بالا اختصار ہارنر کے طریقہ تقرب میں اسقدر اہم تھا کہ اس طریقہ کا ذکر بغیر اس کو بیان کئے ہوئے غیر مکمل رہ جاتا۔

(236)

# مثالیں

۱۔ دفعہ ماسبق کی مثال ۲ میں جو مساوات درج ہے اس کی وہ اصل اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

اس مثال کے نتیجہ کو تسلیم کر کے ہم اجمالی عمل تیسرے استحالہ کی تکمیل کے بعد سے شروع کرینگے چنانچہ اس استحالہ کے بعد کا عمل ذیل میں درج ہے:۔

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱،۶۳۶۹۱۳۵۷۵) | ۱۷۵۴۹۴۳۹۔ | ۲۵۱۶۵۷۸۸ | ۳۱۵۰۴۴ | ۱۷۵۲ |
| | ۱۵۲۱۳۰۹۰ | ۱۸۹۳۶ | ۶ | |
| | ۲۳۳۶۳۴۹۔ | ۲۵۳۵۵۱۵ | ۳۱۵۶ | |
| | ۲۳۰۱۵۹۷ | ۱۸۹۷۲ | ۶ | |
| | ۳۴۷۵۲۔ | ۲۵۵۴۴۸۷ | ۳۱۶۲ | |
| | ۲۵۶۰۱ | ۲۸۵ | ۶ | |
| | ۹۱۵۱۔ | ۲۵۵۷۳۳ | ۳۱۶۸ | |
| | ۷۶۸۰ | ۲۸۵ | | |
| | ۱۴۷۱۔ | ۲۵۶۰۱۸ | ۳۲ | |
| | ۱۲۸۰ | | | |
| | ۱۹۱۔ | | | |
| | ۱۷۹ | | | |
| | ۱۲ | | | |

یہاں ہندسوں کو کاٹ دینے کے پہلے عمل سے یعنی آخر سے دوسرے سر سے ۸، آخر سے تیسرے سر سے ۱۴، آخر سے چوتھے سر سے ۵۲۔ کو خارج کر دینے سے چار درجی کا پہلا سر صرف ایک رہ جاتا ہے۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاتے ہیں گویا کہ سرا، ۳۱۵۰، ۲۵۱۶۵۷۸، ۱۷۵۴۹۴۳۹۔ جو باقی رہ جاتے ہیں کسی مساوات کے سر ہیں۔ اصل کے ایسے ہندسہ سے

ضرب دینے میں منقطع ہندسوں کو ذہن میں ضرب دے لینا چاہیئے تاکہ حاصل کے ہندسہ کو حساب میں شامل کیا جا سکے جیساکہ مختصر تقسیم میں کیا جاتا ہے۔

جب اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹانے کا عمل مکمل ہو جائے تو استحالہ شدہ کعبی میں پھر ہم آخر سے دوسرے سر سے ۷، آخر سے تیسرے سر سے ۶۸، قطع کرتے ہیں اور پہلا سر بالکل غائب ہو جاتا ہے۔ عمل پھر اس طور پر جاری رہتا ہے گویا صرف دو درجی کے سروں ۳۱، ۲۵۵۴۴۸، -۲۳۳۶۳۴۹ سے واسطہ ہے۔ ہندسوں کو پھر قطع کرنے کے عمل کا اثر یہ ہوگا کہ سر ۳۱ بالکل خارج ہو جائیگا۔ بعد کا عمل اجمالی تقسیم کے عمل کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب عمل ختم ہو جاتا ہے تو خارج قسمت میں اعشاری ہندسوں کی تعداد آخر کے دو یا تین ہندسوں تک صحیح خیال کیجا سکتی ہے اجمالی عمل شروع کرنے سے پیشتر اصل کو جس حد تک معلوم کرنا پڑتا ہے وہ اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے کیونکہ اجمالی عمل شروع ہو جانے کے بعد معلومہ ہندسوں کے علاوہ ہمیں ہندسوں کی اتنی تعداد جو آزمائشی مقسوم علیہ کے کے ہندسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہے حاصل ہوگی۔

۲۔ مساوات

$$لا^{۴} - ۱۲لا + ۷ = ۰$$

کی وہ اصل جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو۔

اس مساوات کی صرف دو مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں، (287) ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان۔ دوسری کو معلوم کرنے کے لئے ہم

ذیل کا عمل کرتے ہیں :—

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۲۶۰۴۷۲۷۵۵۶۷۱) | ۷ | ۱۲- | ۰ | ۰ |
| | ۸- | ۸ | ۴ | ۲ |
| | ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰- | ۴- | ۴ | ۲ |
| | ۸۳۸۹۱۴۵۶ | ۲۴ | ۸ | ۲ |
| | ۱۶۱۰۸۵۴۴- | ۲۰۰۰۰۰۰۰ | ۱۲ | ۴ |
| | ۱۵۴۹۳۴۰۱ | ۹۷۲۸۶۴ | ۱۲ | ۲ |
| | ۶۱۵۱۴۳- | ۲۰۹۷۲۸۶۴ | ۲۴۰۰۰۰ | ۶ |
| | ۴۴۶۲۶۲ | ۹۸۵۷۹۲ | ۳۲۱۶ | ۲ |
| | ۱۶۸۸۸۱- | ۲۱۹۵۸۶۵۶ | ۲۴۳۲۱۶ | ۸۰۰ |
| | ۱۵۶۲۲۶ | ۱۷۴۷۸ | ۳۲۳۲ | ۴ |
| | ۱۲۶۵۵- | ۲۲۱۳۳۴۳ | ۲۴۶۴۴۸ | ۸۰۴ |
| | ۱۱۱۵۹ | ۱۷۴۷۸ | ۳۲۴۸ | ۴ |
| | ۱۴۹۶- | ۲۲۳۰۸۲۲ | ۲۴۹۶۹۶ | ۸۰۸ |
| | ۱۳۳۸ | ۴۹ | ۲۴۹۶ | ۴ |
| | ۱۵۸- | ۲۲۳۱۳۱ | | ۸۱۲ |
| | ۱۵۶ | ۴۹ | | ۴ |
| | ۲ | ۲۲۳۱۸۰ | ۲۴ | ۸۱۶ |

یہاں اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے کے بعد اور استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دینے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آزمایشی مقسوم علیہ ۲۰۰۰، مطلق رقم ۱۰۰۰۰ کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ اس لئے ہم خارج قسمت میں صفر رکھتے ہیں اور پھر اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ باقی کا عمل حسب سابق کیا گیا ہے۔

۳ — اسی مساوات کی وہ اصل معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔

جواب :- ،۵۹۳۶۸۵۸۲۹

۴ — مساوات

لا$^3$ + ۲۴،۸۴ لا$^2$ − ۶۰۷،۶۱۳ لا − ۳۷۶۱،۲۷۵۸ = ۰

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جب مجوزہ مساوات میں علامات اعشاریہ شامل ہوں تو یہ معلوم ہوگا کہ اصل کا اعشاری حصہ شروع ہونے کے بعد۔ اسے متواتر ضرب دینے کی وجہ سے وہ بہت جلد غائب ہو جاتی ہیں۔

جواب :- ۱۱،۱۹۷۳۲۲۲

۵ — مساوات

لا$^4$ − ۱۲لا$^2$ + ۱۲لا − ۳ = ۰

کی منفی اصل اعشاریہ کے سات مقامات تک معلوم کرو۔

جب منفی اصل معلوم کرنا مطلوب ہو تو لا کی علامت بدل دینے اور استحالہ شدہ مساوات کی متناظر مثبت اصل معلوم کرنے میں سہولت ہو گی۔

جواب :— −۳،۹۰۷۳۷۸۵

(238) **۱۱۱ — ہارنر کے طریقہ کا استعمال ایسی صورتوں میں جہاں اصلیں تقریباً مساوی ہوں** ۔ دفعہ ۱۰۷ میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ تقرب کا وہ طریقہ جو وہاں بیان ہوا ناکام رہتا ہے جب مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔ اس نوعیت کی مثالیں اپنی تحلیل (دیکھو مثال، دفعہ ۹۸) اور اپنے حل دونوں میں سب سے زیادہ مشکلیں پیدا کرتی ہیں۔ ہارنر کے طریقہ سے ایسی مساواتوں کا حل معلوم کرنا ممکن ہے اگرچہ دوسری صورتوں کی بہ نسبت ہمیں ذرا زیادہ محنت کرنی پڑتی ہے۔ جب تک کہ دونوں اصلوں کے صدر ہند سے ایک ہی رہتے ہیں اس وقت تک چند پیش بندیوں کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے۔ یہ پیش بندیاں ذیل کی مثالوں سے ظاہر

ہو جائینگی ۔ دونوں اصلوں کو جدا کرنے کے بعد عمل حساب ہر ایک کے لئے جداگانہ طور پر دفعات ماسبق کی مثالوں کی طرح کیا جاتا ہے۔ دفعہ ۱۰۹ میں آزمائشی مقسوم علیہ کی جو تشریح کی گئی ہے اس سے یہ ظاہر ہے کہ زیر بحث صورت میں نیوٹن کا طریقہ جس سبب سے ناکام رہتا ہے (دفعہ ۱۰۷) اسی سبب سے آزمائشی مقسوم علیہ اسوقت تک موثر نہیں ہوگا جبتک کہ اصلوں کو جدا کرنے کے بعد پہلی یا دوسری منزل کی تکمیل نہ ہو جائے۔

# مثالیں

۱ ـ مساوات

$$لا^{۳} - ۷\ لا + ۷ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ہیں (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۶)۔ ہر ایک اصل اعشاریہ کے ۸ مقامات تک معلوم کرو ـ

اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات (ان اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دینے کے بعد) یعنی

$$لا^{۳} + ۳۰\ لا^{۲} - ۴۰۰\ لا + ۱۰۰۰ = ۰$$

کی دو اصلیں صفر اور ۱۰ کے درمیان ہونی چاہئیں ـ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ایک تو ۳ اور ۴ کے درمیان اور دوسری ۶ اور ۷ کے درمیان ـ اب اصلیں جدا ہو جاتی ہیں اور ہم ہر ایک کے دریافت کرنیمیں وہی عمل اختیار کرتے ہیں جو پہلے بیان ہو چکا ہے ـ اگر اس منزل پہ اصلیں جدا نہ ہوتیں تو ہم وہ صدر ہندسہ معلوم کرتے جو دونوں میں مشترک ہوتا اور پھر اصلوں کو بقدر اس ہندسہ کے گھٹانے کے بعد یہ دیکھتے کہ استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں کن وقفوں کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

جواب :ـ ۱٫۳۵۶۸۹۵۸۴ ، ۱٫۶۹۲۰۲۱۴۷

۲ ـ مساوات

$$لا^{۳} - ۴۹\ لا^{۲} + ۶۵۸\ لا - ۱۳۷۹ = ۰$$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان واقع ہیں ۔
اِن میں سے چھوٹی اصل کے لئے تقریب کا مکمل عمل اعشاریہ کے ۷ مقامات تک بتایا جائیگا اور پھر چند مشاہدات کئے جائینگے تاکہ طالب علم کو اس قسم کی تمام صورتوں میں مدد مل سکے ۔

(39) ۲۳۰۲۱۳۱۲۷۷)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱۳۷۹- | ۶۵۸ | ۴۹- | ۱ |
| ۱۵۶۰ | ۵۸۰- | ۲۰ | |
| ۱۸۱ | ۷۸ | ۲۹- | |
| ۱۸۰- | ۱۸۰۰- | ۲۰ | |
| ۱۰۰۰ | ۱۰۲- | ۹- | |
| ۹۹۲- | ۴۲ | ۲۰ | |
| ۸۰۰۰ | ۶۰- | ۱۱ | |
| ۶۷۳۹- | ۵۱ | ۳ | |
| ۱۲۶۱۰۰۰ | ۹۰۰- | ۱۴ | |
| ۱۲۱۷۴۰۳- | ۴۰۴ | ۳ | |
| ۴۳۵۹۷ | ۴۹۶- | ۱۷ | |
| ۳۴۱۸۳- | ۴۰۸ | ۳ | |
| ۹۴۱۴ | ۸۸۰۰- | ۲۰۰ | |
| ۶۷۸۶- | ۲۰۶۱ | ۲ | |
| ۲۶۲۸ | ۶۷۳۹- | ۲۰۲ | |
| ۲۳۷۲ | ۲۰۶۲ | ۲ | |
| ۲۵۶ | ۴۶۷۷۰۰- | ۲۰۴ | |
| ۲۳۶- | ۶۱۸۹۹ | ۲ | |
| ۲۰ | ۴۰۵۸۰۱- | ۲۰۶۰ | |
| | ۶۱۹۰۸ | ۱ | |
| | ۳۴۳۸۹۳- | ۲۰۶۱ | |
| | ۲۰۶ | ۱ | |
| | ۳۴۱۸۳- | ۲۰۶۲ | |
| | ۲۰۶ | ۱ | |
| | ۳۳۹۷۷-۲۶ | ۲۰۶۳۰ | |
| | ۴ | ۳ | |
| | ۳۳۹۳- | ۲۰۶۳۳ | |
| | ۴ | ۳ | |
| | ۳۳۸۹-۲ | ۲۰۶۳۶ | |
| | | ۳ | |
| | | ۲۰۶۳۹ | |

اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے مطلق رقم کی علامت بدلجاتی ہے یہ اس بات کی علامت ہے کہ ایک اصل صفر اور ۲۰ کے درمیان واقع ہے جس سے فی الحال ہمیں کوئی تعلق نہیں۔ پہلی استحالہ شدہ مساوات

$$\text{لا}^{3} + 11\,\text{لا}^{2} - 102\,\text{لا} + 181 = 0$$

کی اصلیں تاہم جدا نہیں ہوئیں کیونکہ دونوں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ ان دونوں عددوں کے اندراج سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے یہاں ہمیں وہ معیار نہیں ملتا جو پچھلی مثالوں میں مخصوص ہندسہ کی تلاش کرنے میں مدد دینے کے لئے حاصل ہوا تھا یعنی مطلق رقم میں علامت کی تبدیلی نہیں ملتی۔ تاہم ایک دوسرا معیار ایسا ہے جس سے کل صرف اندراج کے ذریعہ وہ وقفہ معلوم ہو سکتا ہے جس کے اندر یہ دونو (240)
اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اگر ہم $\text{لا}^{3} + 11\,\text{لا}^{2} - 102\,\text{لا} + 181 = 0$ کی اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات $\text{لا}^{3} + 23\,\text{لا}^{2} + 34\,\text{لا} + 13 = 0$ میں علامت کی کوئی تبدیلی ظہور پذیر نہیں ہوتی۔ پس یہ دونوں اصلیں صفر اور ۴ کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ اگر ہم اس کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات میں (جیسا کہ اوپر کے عمل سے ظاہر ہے) علامت کی تبدیلیوں کی تعداد وہی ہے جو خود مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی ہے۔ پس یہ دونوں اصلیں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے وہ ابتک جدا نہیں ہوئیں اور ہم اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات

$$\text{لا}^{3} + 200\,\text{لا}^{2} - 900\,\text{لا} + 1000 = 0$$

میں اسی طرح دونوں اصلوں کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے کیونکہ بقدر ۲ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں میں علامت کی دو تبدیلیاں رہتی ہیں (دیکھو عمل بالا) اور بقدر ۳ کے گھٹانے سے تمام علامتیں مثبت حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ اس حد تک دونوں اصلیں اپنے پہلے تین ہندسوں تک مماثل ہیں یعنی ۳۲ء۳ تک۔ پھر ہم بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں تو

استحالہ شدہ مساوات لا^۳ + ۲۰۶۰ لا^۲ − ۸۸۰۰ لا + ۰۰۱۲۶۱ = ۰ کی صرف ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ ۱ سے مثبت اور ۲ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی دوسری اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے کیونکہ ۳ سے مثبت نتیجہ ملتا ہے۔ اب اصلیں جدا ہوگئیں۔ ہم عمل بالا میں چھوٹی اصل کا تقرب اس مساوات کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے حاصل کرتے ہیں۔ آزمائشی مقسوم علیہ دوسری منزل سے موثر ہوجاتا ہے بڑی اصل کا تقرب حاصل کرنا ہو تو اسی مساوات کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانا چاہیئے اور اس بات کی احتیاط رکھنی چاہیئے کہ بعد کے اعمال میں منفی علامت جو اس استحالہ کی وجہ سے مطلق رقم کی ہوگی برقرار رہے۔ یہ دوسری اصل ہوگی ۲۳، ۲۲۹۵۲۱۲۔

جب تک دونوں اصلیں ایک ساتھ رہتی ہیں اصل کے مناسب ہندسہ کا پتہ آخر سے دوسرے سر سے آخری سر کو دوچند کرکے تقسیم کرنے سے ملسکتا ہے یا آخر سے تیسرے سر سے آخر سے دوسرے سر کو دوچند کرکے تقسیم کرنے سے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات اب ایسے دو درجی کے قریب آتی ہے جو ہر استحالہ شدہ مساوات کے آخری تین سروں سے بنتی ہے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ پچھلی صورتوں میں اور نیوٹن کے طریقہ میں مجوزہ مساوات کا تقرب آخری دو سروں سے بننے والی مفرد مساوات کی شکل میں حاصل ہوا تھا۔ متذکرہ صدر دو درجی کی دونوں اصلیں مجوزہ مساوات کی وہ اصلیں ہوگی جو تقریباً مساوی ہیں، اور جب مساوات ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی دونوں اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو انمیں سے کوئی ایک $\frac{-۲ج}{ب}$ یا $\frac{-ب}{۲ا}$ سے تقریباً حاصل ہو جاتی ہے۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ہندسہ ۳، $\frac{۱۸۱\times۲}{۱۰۲}$ سے اور ہندسہ ۲، $\frac{۱۰۰۰\times۲}{۹۰۰}$ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ سے ہم عام

طور پر پہلی کوشش میں وہ دو ہندسے معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان اصلوں کا زوج واقع ہے۔ نیز اس سے ہمیں اصلوں کے جدا ہونیکا پتہ بھی اس امر کا مشاہدہ کرنے سے لگ جاتا ہے کہ آخری تین سروں سے اس طور پر حاصل کئے ہوئے ہندسے کب مختلف ہوتے ہیں یعنی

کب $\frac{ج^{2}}{ب}$ اور $\frac{ب}{ا^{2}}$ مختلف ہوتے ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^{4} + ۸ لا^{3} - ۷۰ لا^{2} - ۱۴۴ لا + ۹۳۶ = ۰$$

کی وہ اصلیں جو ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہیں اعشاریہ کے تین مقامات تک محسوب کرو۔

**جواب :—** ۴،۲۴۲ ، ۴،۲۴۶

۴۔ مساوات

$$۶۴ لا^{3} - ۵۹۲ لا^{2} + ۱۶۴۹ لا - ۱۴۴۵ = ۰$$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہیں۔

**جواب :—** دونوں اصلیں = ۲،۱۲۵

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مقام اعشاریہ تک دونوں اصلیں (241)
جدا نہیں ہوئیں۔ جب ہم بقدر ۵ کے گھٹاتے ہیں تو مطلق رقم معدوم ہوتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ۲،۱۲۵ ایک اصل ہے۔ پھر بقدر ۵ کے گھٹانے سے آخر سے دوسرا سر بھی معدوم ہو جاتا ہے پس ۲،۱۲۵ دوہری اصل ہے۔

جب کسی مساوات میں دو سے زیادہ تقریباً مساوی اصلیں ہوں تو وہ سب ہارنر کے عمل سے متذکرۂ بالا طریقہ کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ عمل میں ایسی صورتیں بہت شاذ واقع ہوتی ہیں۔ طالب علم کے لئے وہ اصول جو اوپر بیان کیا گیا ہے ایسی تمام صورتوں میں رہبری کرنے کے لئے کافی ہے۔

۱۱۲ــ **تقرب کا لگرانج کا طریقہ** ـ لگرانج نے عددی مساوات کی اصل کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں بیان کرنے کا ایک طریقہ معلوم کیا ہے ـ لیکن چونکہ یہ طریقہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کے طریقہ کے مقابلہ میں بہت ادنیٰ حیثیت رکھتا ہے اس لئے اسکا صرف مختصر ذکر کرنے پر ہم اکتفا کرینگے ـ

فرض کرو کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اور صرف ایک اصل متصلہ اعداد ا اور ا + ۱ کے درمیان واقع ہے ـ مجوزہ مساوات میں لا کی بجائے ا + $\frac{1}{\text{ما}}$ درج کرو ـ ما میں استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی ـ فرض کرو کہ امتحان کرنے سے اسکا ب اور ب + ۱ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے ـ ما میں یہ جو مساوات ہے اس کو ما = ب + $\frac{1}{\text{ی}}$ کے اندراج سے مستحیل کرو ـ ی میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصل کا ج اور ج + ۱ کے درمیان واقع ہونا معلوم کیا جاتا ہے ـ اس عمل کو جاری رکھنے سے اصل کا تقرب ایک مسلسل کسر کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے مثلاً

$$\text{ا} + \cfrac{1}{\text{ب} + \cfrac{1}{\text{ج} + \cfrac{1}{\cdots\cdots}}}$$

## مثالیں

۱ـ مساوات

$$\text{لا}^3 - 2\,\text{لا} - 5 = 0$$

کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو ـ

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے ـ لا = ۲ + $\frac{1}{\text{ما}}$ کا استحالہ

عمل میں لانے کے لئے اول ہم دفعہ ۳۴ کا عمل استعمال کرتے ہیں اور اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں ۔ پھر ہم وہ مساوات معلوم کرتے ہیں جس کی اصلیں استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کی متکافی ہوں ۔

اس طور پر ما میں جو مساوات حاصل ہوتی ہے وہ ہے (242)

ما^۳ − ۱۰ ما^۲ − ۶ ما − ۱ = ۰

اسکی ایک اصل ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان ہے ۔ ما = ۱۰ + ۱/ی درج کرو تو ی میں مساوات حاصل ہوگی

۶۱ ی^۳ − ۹۴ ی^۲ − ۲۰ ی − ۱ = ۰

اسکی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے ۔ رکھو ی = ۱ + ۱/ع تو ع میں مساوات ہوگی

۵۴ ع^۳ + ۲۵ ع^۲ − ۸۹ ع − ۶۱ = ۰

جس کی اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے ۔ علیٰ ہذالقیاس ۔

اس لئے اصل کے لئے ہمیں ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے :—

لا = ۲ + ۱/(۱۰ + ۱/(۱ + ۱/(۱ + ........)))

۲ — لا^۳ − ۶ لا − ۱۲ = ۰ کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو ۔

جواب :— ۳ + ۱/(۵ + ۱/(۱ + ۱/(۱ + .....)))

۱۱۳ — چار درجی کا عددی حل ۔ عددی مساواتوں کے حل کا

مضمون ختم کرنے سے پیشتر چھٹے باب میں بیان کردہ حل کے طریقوں کے عملی فائدوں کا ذکر کرنا ضروری ہے۔ گو یہ بیان کیا گیا تھا کہ مساواتوں کا عددی حل اس باب کے طریقوں سے عموماً سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے لیکن ایسی صورتیں بھی ہیں جنمیں چار درجی کے حل کے لئے چھٹے باب کے طریقوں کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔ جب چار درجی مساوات سے محول کعبی ملجائے جسکی ایک اصل متوافق ہو تو اس اصل کو فوراً معلوم کیا جا سکتا ہے اور چار درجی کے حل کی تکمیل ہو سکتی ہے۔ ہم اس قسم کی چند مثالیں ڈیکارٹ کا طریقہ استعمال کر کے (دفعہ ۶۴) حل کرتے ہیں جو عموماً ایسی صورتوں میں عملی طور پر سب سے زیادہ سہولت بہم پہنچاتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ چار درجی

$$\text{لا}^{۴} - ۶\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۲۲\,\text{لا} - ۶$$

کو دو درجی اجزا میں تحلیل کرو۔

دفعہ ۶۴ کا مفروض اختیار کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں

ف + فَ = -۳، ق + قَ + ۴ ف فَ = ۳، ف قَ + فَ ق = ۱۱،
ق قَ = -۶

نیز فہ = $\frac{۱}{۲}$ - ف فَ = $\frac{۱}{۴}$ (ق + قَ - ۱)

اور ع اور ج کو محسوب کرنے سے فہ کے لئے مساوات ملتی ہے

$$۴\,\text{فہ}^{۳} - \frac{۱۱۱}{۴}\,\text{فہ} - \frac{۲۲۵}{۸} = ۰$$

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور رکھو ۴ فہ = ت تو

$$\text{ت}^{۳} - ۱۱۱\,\text{ت} - ۴۵۰ = ۰$$

اب مقسوم علیہم کے طریقہ سے یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کی اسکی

ایک اصل - ٦ ہے پس فہ = - $\frac{۳}{۲}$ جس سے

ف فَ = ۲ ، ق + قَ = ۵۰

ان کو اوپر کی مساواتوں کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو

ف = - ۲ ، فَ = - ۱ ، ق = ۱ ، قَ = - ٦

جب ، ق اور قَ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو وہ مساوات جس سے ف قَ + فَ ق کی قیمت حاصل ہوتی ہے اس بات کا تعین کریگی کہ ق کی کونسی قیمت ف کے ساتھ اور کونسی فَ کے ساتھ لینی چاہیئے ۔ اس لئے مجوزہ چار درجی ذیل کے اجزا میں تحلیل ہو جاتا ہے

(لا$^۲$ - ۴ لا + ۱) (لا$^۲$ - ۲ لا - ٦)

فہ کی دوسری دو قیمتوں کے ذریعہ ہم چار درجی کو دو اور طریقوں سے تحلیل کر سکتے ہیں یا ہم اسی عمل کو محصلہ دو درجی کے حل کرنے سے مکمل کر سکتے ہیں ۔

۲ ـــ چار درجی ف (لا) ≡ لا$^۴$ - ۸ لا$^۳$ - ۱۲ لا$^۲$ + ٦۰ لا + ٦۳

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

فہ کے لئے مساوات ہے

۴ فہ$^۳$ - ۱۹۵ فہ - ۴۷۵ = ۰

جسکی ایک اصل - ۵ ہے ۔

جواب :- ف (لا) ≡ (لا$^۲$ - ۲ لا - ۳) (لا$^۲$ - ٦ لا - ۲۱)

(244) ۳ ـــ ف (لا) ≡ لا$^۴$ - ۱۰ لا$^۲$ - ۲۰ لا - ٦

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو ۔

محول کعبی ہے

۴ فہ$^۳$ - $\frac{۲۱۷}{۱۲}$ فہ + $\frac{۳۱۸۵}{۲۱٦}$ = ۰

یا اصلوں کو ٦ سے ضرب دینے سے

۴ ت$^۳$ - ٦۵۱ ت + ۳۱۸۵ = ۰

اسکی ایک اصل ۷ ہے۔ پس فہ = ۷/۹

**جواب**:- ف(لا) ≡ (لا$^{2}$ + ۴لا + ۲)(لا$^{2}$ - ۴لا - ۳)

۴- ف(لا) ≡ لا$^{4}$ - ۶لا$^{3}$ - ۹لا$^{2}$ + ۶۶لا - ۲۲

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

محول کعبی ہے

۴فہ$^{3}$ - (۳۳۵/۴) فہ - ۸۹۷/۸ = ۰

پس فہ = - ۳/۲

**جواب**:- ف(لا) ≡ (لا$^{2}$ - ۱۱)(لا$^{2}$ - ۶لا + ۲)

۵- ف(لا) ≡ لا$^{4}$ - ۸لا$^{3}$ + ۲۱لا$^{2}$ - ۲۶لا + ۱۴

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

**جواب**:- ف(لا) ≡ (لا$^{2}$ - ۲لا + ۲)(لا$^{2}$ - ۶لا + ۷)

۶- لا$^{4}$ + ۱۲لا + ۳

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

**جواب**:- (لا$^{2}$ - لا√۶ + ۳ + √۶)(لا$^{2}$ + لا√۶ + ۳ - √۶)

۷- ۴لا$^{4}$ - ۸لا$^{3}$ - ۱۲لا$^{2}$ + ۴۸لا - ۶۳ = ۰

کے دو درجی اجزاء معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو (دیکھو مثال ۸ صفحہ ۳۴۳)

**جواب**:- {لا$^{2}$ - ۲لا(۲ + √۷) + ۳ + √۷}{لا$^{2}$ - ۲لا(۲ - √۷)

- ۳ √۷}

(24ج)

# متفرق مثالیں

۱- لا$^{3}$ - ۶لا - ۱۳ = ۰

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :— ۳٫۱۷۶۸۱۴۳۹۳

۲ —— $لا^{۳} - ۲لا - ۵ = ۰$
کی مثبت اصل اعشاریہ کے ۸ یا ۹ مقامات تک معلوم کرو۔
جواب :— ۲٫۰۹۴۵۵۱۴۸۳

۳ —— مساوات
$۲لا^{۳} - ۶۵۰٫۸لا^{۲} + ۵لا - ۱۲۲۷ = ۰$
کی ایک اصل ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان ہے۔ اسکو معلوم کرو۔
جواب :— متوافق اصل ۳۲۵٫۴

۴ —— مساوات
$۴لا^{۳} - ۱۸۰٫۱لا^{۲} + ۱۸۹۶لا - ۴۵۷ = ۰$
کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان ہے۔
جواب :— ۲۸٫۵۲۱۲۷۷۳۸

۵ —— مساوات
$لا^{۳} - ۴۹لا^{۲} + ۶۵۸لا - ۱۳۷۹ = ۰$
کی وہ اصل اعشاریہ کے چھہ مقامات تک معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔
جواب :— ۲٫۵۵۷۳۵۱

۷ —— مساوات
$لا^{۳} + ۲لا^{۲} - ۲۳لا - ۷۰ = ۰$
کی مثبت اصل اعشاریہ کے تقریباً ۱۰ مقامات تک معلوم کرو —
جواب :— ۵٫۱۳۴۵۷۸۷۲۵۲۸

۸ —— ۶۷۳۳۷۳۰۹۷۱۲۵ کا جذر الکعب معلوم کرو۔
جواب :— ۸۷۶۵

۹ —— ۵۳۷۸۲۴ کا پانچواں جذر معلوم کرو —
جواب :— ۱۴

۱۰ —— کعبی مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

مثال ۷ صفحہ ۱۴۶) کی مساوات $\text{لا}^{۶} + \text{لا}^{۳} + ۱ = ۰$ مساوات بالا میں تحویل ہوتی ہے۔

**جواب:-** -۱٫۸۷۹۳۸، ۰٫۳۴۷۲۹، ۱٫۵۳۲۰۹

چھوٹی مثبت اصل سے ذیل کے مسئلہ کا حل ملتا ہے:- ایک نصف کرہ کو جس کا نصف قطر اکائی ہو دو مساوی حصوں میں قاعدے کے متوازی مستوی سے تقسیم کرنا۔

۱۱— کعبی $\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا} - ۱ = ۰$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔ (دیکھو مثال ۱ صفحہ ۱۴۵)

**جواب:-** -۱٫۸۰۱۹۴، -۰٫۴۴۵۰۴، ۱٫۲۴۶۹۸ (246)

۱۲— مساوات

$$\text{لا}^{۵} + \text{لا}^{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱ = ۰$$

کی منفی اصل، -۱ اور صفر کے درمیان، اعشاریہ کے ۵ مقامات تک معلوم کرو (دیکھو مثال ۳ صفحہ ۱۴۶)

**جواب:-** -۰٫۲۸۴۶۳

۱۳— مساوات

$$\text{لا}^{۳} - ۳۱۵\,\text{لا}^{۲} - ۱۹۶۸۴\,\text{لا} + ۲۹۷۷۲۶ = ۰$$

کو حل کرو۔

ہم یہاں یہ دیکھتے ہیں کہ ایک اصل ۷۰ اور ۸۰ کے درمیان ہے۔ ہارنر کے عمل سے اس اصل کا ۷۸ ہونا معلوم ہوتا ہے۔ انتقالشدہ مساوات سے دو اصلیں ملتی ہیں جن کو بقدر ۷۸ کے بڑھا دیا جائے تو کعبی کی باقی دو اصلیں حاصل ہوتی ہیں۔

**جواب:-** ۷۸، ۳۴۷، -۱۱۰۰

۱۴— مساوات $\text{لا}^{۴} - ۱۱۷۲۷\,\text{لا} + ۴۰۳۸۵ = ۰$

کی دو حقیقی اصلیں ہیں۔ اِن کو معلوم کرو۔

جواب :- ۳۱،۴۵۵۹۲ ، ۲۱،۴۳۰۶۷

مسٹر جی۔ ایچ۔ ڈارون نے اس مساوات کو مقالہ
*On the precession of a viscous spheroid, and on the Remote History of the Earth*
میں درج کیا ہے۔ دیکھو Phil. Trans. حصہ دوم بابتہ ۱۸۷۹ء صفحہ ۵۰۸۔
یہ اصلیں "زمین کی گردش کے جذر الکعب کی وہ دو قیمتیں ہیں جنکے لئے زمین اور چاند ملکر ایک استوار جسم کی طرح حرکت کرتے ہیں"

۱۵- مساوات

۲۰ لا$^{۳}$ − ۲۴ لا$^{۲}$ + ۳ = ۰

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- -۰،۳۱۴۶۹ ، ۰،۴۴۶۰۳ ، ۱،۰۶۸۶۵

یہ مساوات ایک مسئلہ کے حل میں واقع ہوتی ہے جو پروفیسر ٹاوں سینڈ نے ایجوکیشنل ٹائمز بابتہ دسمبر ۱۸۷۶ء میں ایک ایسے شہتیر کے انصراف کو متعین کرنے کے لئے بیان کیا ہے جو یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور جو اپنے دونوں سروں اور نقاط تثلیث پر تھما ہوا ہو۔ متذکرہ صدر حل پروفیسر بال نے حاصل کیا تھا۔

۱۶- مساوات

۱۴لا$^{۳}$ + ۱۲لا$^{۲}$ − ۹لا − ۱۰ = ۰

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۰،۸۵۹۰۶

یہ اور ذیل کی مثالوں کی مساواتیں ایسے سوالوں کی تحقیقات میں واقع ہوتی ہیں جو ٹیکوں پر تھمے ہوئے شہتیروں سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۷- مساوات

۷لا$^{۴}$ + ۲۰لا$^{۳}$ + ۳لا$^{۲}$ − ۱۶لا − ۸ = ۰

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب:- ۰٫۹۱۳۳۶

۱۸- مساوات

لا$^{۵}$ + ۱۲ لا$^{۴}$ + ۵۹ لا$^{۳}$ + ۱۵۰ لا$^{۲}$ + ۲۰۱ لا - ۲۰۷ = ۰

کی مثبت اصل اعشاریہ کے دس مقامات تک معلوم کرو۔

جواب:- ۰٫۶۳۸۶۰۵۸۰۳۳

(247) ۱۹ — ف(لا) ≡ لا$^{۵}$ + ۲لا$^{۴}$ - ۳۶ لا$^{۳}$ - ۱۴۹ لا$^{۲}$ - ۲۳۲ لا - ۳۳۶ = ۰

کی سب متوافق اصلیں معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو۔

جواب:- ف(لا) ≡ (لا$^{۲}$ + لا + ۳) (لا + ۴)$^{۲}$ (لا - ۷)

۲۰ — اسی طرح مساوات

ف(لا) ≡ لا$^{۵}$ - ۳۲ لا$^{۴}$ + ۱۱۶ لا$^{۳}$ - ۱۱۶ لا$^{۲}$ + ۱۱۵ لا - ۸۴ = ۰

کو حل کرو۔

جواب:- (لا$^{۲}$ + ۱) (لا - ۱) (لا - ۳) (لا - ۲۸)

۲۱ — وہ شرط معلوم کرو کہ دفعہ ۹۹ مثال ۳ میں اسٹرم کا جو دو درجی باقی ہے اس کی اصلیں خیالی ہوں۔

جواب:- ھ ع + ۳ ا جے مثبت۔

یہ شرط اس وقت پوری ہوتی ہے جبکہ ھ اور جے دونوں مثبت ہوں (کیونکہ اس صورت میں دفعہ ۷۰ کی متماثلہ کی رو سے ع کو مثبت ہونا چاہیئے) اس لئے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جا سکتا ہے کہ متذکرہ صدر چار درجی حقیقی اصلیں نہیں رکھتا جبکہ ھ اور جے مثبت ہوں (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۲۳)

۲۲ — جب اس چار درجی کی دو اصلیں ء کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا ء + ب} = \frac{\text{- گ ع}}{\text{۲ ھ ع - ۳ ا جے}}$$

۲۳ — اگر مساوات ف(لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو

ثابت کروکہ مساوات ف (لا) فً (لا) − [فَ (لا)]$^{۲}$ = ۰ کی سب اصلیں خیالی ہیں ۔

۲۴ — اگر کسی درجہ کی مساوات میں جو لا کی قوتوں کی بموجب ترتیب دیگئی ہو تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کروکہ اس کی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہوسکتیں ۔

یہ تین رقمیں اس شکل ک لا$^{ر}$ + ک ع لا$^{ر-۱}$ + ک ع$^{۲}$ لا$^{ر-۲}$ کی ہونی چاہئیں ۔ فرض کروکہ مساوات کو لا − ع سے ضرب دیا گیا ہے ۔ تب حاصل شدہ مساوات کی دو متصل رقمیں غائب ہو جائینگی اور اسلئے اس کی کم ازکم دو خیالی اصلیں ہونی چاہئیں لیکن اس مساوات کی اصلیں سوائے ع کے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں ۔

۲۵ — اگر کسی مساوات کے چار متصل رقمیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کروکہ اسکی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہوسکتیں ۔

اس کو گذشتہ مثال میں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔ ان چار رقموں کو انکی خاص شکل میں لکھ کر لا − ۱ سے ضرب دینے سے یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل شدنی مساوات کی تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ۔

۲۶ — پانچ درجی کے لئے جسمیں دوسری رقم غیر موجود ہو اسٹرم کے پہلے دو باقیوں کو محسوب کرو ۔

ف (لا) ≡ لا$^{۵}$ + ا لا$^{۳}$ + ب لا$^{۲}$ + ج لا + د

جواب :- ر$_{۱}$ ≡ −۲ ا لا$^{۳}$ − ۳ ب لا$^{۲}$ − ۴ ج لا − ۵ د

ر$_{۲}$ ≡ اَ لا$^{۲}$ + بَ لا + جَ

جہاں اَ ≡ ۴۰ ا ج − ۱۲ ا$^{۳}$ − ۴۵ ب$^{۲}$، بَ ≡ ۵۰ ا د − ۸ ا$^{۲}$ ب − ۶۰ ب ج،

جَ ≡ −۴ ا$^{۲}$ ج − ۷۵ ب د،

اوپر کی ترقیم کو باقی رکھیں تو تیسرے باقی ر$_{۳}$ ≡ دَ لا + عَ کے سرول

د اور ع کو ا، ب، ج، د، ا، ب، ج کی رقوم میں بآسانی محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اور بالآخر ک_۴ کو ا، ب، ج، د، ع کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(248) ۲۷۔ ثنائی سروں کے ساتھ لکھے ہوئے عام پانچ درجی سے دوسری رقم خارج کرو اور ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں ان کے صدر سر ہیں

- ھ، - ۵ ھ ع + ۹ ا_۲ ج

۲۸۔ ن ویں درجہ کی مساوات جسمیں دوسری رقم غیر موجود ہو یعنی مساوات

لا^ن + ا لا^(ن-۲) + ب لا^(ن-۳) + ج لا^(ن-۴) + ..... = ۰

کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوں اُن کے صدر سر معلوم کرو۔

اِن سروں کے علاوہ جو اوپر درج ہیں کوئی اور سر مطلوبہ قیمتوں میں شریک نہیں ہونگے۔ ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

ک_۱ ≡ - ۲ ا لا^(ن-۲) - ۳ ب لا^(ن-۳) - ۴ ج لا^(ن-۴) - ....

ک_۲ ≡ - {۴ (ن-۲) ا^۳ - ۸ ن ا ج + ۹ ن ب^۲} لا^(ن-۳) + ....

۲۹۔ ثنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی ن ویں درجہ کی مساوات سے دوسری رقم خارج کرو اور ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں اُن کے صدر سر ہیں

- ھ، - ن ھ ع + ۳ (ن - ۲) ا_۲ ج،

اِن جملوں کو آسانی کے ساتھ پچھلی مثال سے دفعہ ۴۵ کے استحالہ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ ا_۲، ا_۳، ا_۴ کی قیمتیں مساواتوں

ا_۲ = ھ، ا_۳ = گ، ا_۴ = ا_۲ ع - ۳ ھ^۲

سے حاصل ہونگی جہاں گ² کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳۷ کی تماثلہ سے رکھی گئی ہے اور مثبت مضروب فیہ خارج کردئے گئے ہیں ۔

۳۰ ـــ یولر کے کعبی کے لئے اسٹرم کے تفاعل محسوب کرو (دفعہ ۶۱ دیکھو) چند تحویلات کے بعد اور مثبت اجزائے ضربی کو خارج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{3} + 3\,\text{ھ}\,\text{لا}^{2} + 3\left(\text{ھ}^{2} - \tfrac{1}{12}\,\text{اُ}^{2}\,\text{ع}\right)\text{لا} - \tfrac{1}{4}\,\text{گ}^{2}$$

$$\text{فَ}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^{2} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2} - \tfrac{1}{12}\,\text{اُ}^{2}\,\text{ع}'$$

$$\text{گا}_{1} \equiv 2\,\text{ع}\,\text{لا} + 2\,\text{ھ}\,\text{ع} - 12\,\text{اُ}\,\text{جے}''$$

$$\text{گا}_{2} \equiv \text{ع}^{3} - 27\,\text{جے}^{2}$$

چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کے متعلق جو شرطیں دفعہ ۶۸ میں حاصل ہوئی ہیں سب کو ان نتیجوں سے مثال ۴ صفحہ ۱۸۳ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اور یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اصلوں کے حقیقی ہونے کے لئے جو شرطیں دفعہ ۱۰۰ اور تذکرہ صدر دفعہ میں حاصل ہوئی تھیں دونوں یہاں باہم حاصل ہوتی ہیں کیونکہ یولر کے کعبی کی سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے لا کی بجائے صفر درج کرنے سے علامت کی تین تبدیلیاں ملنی چاہئیں اور اسکے لئے اس بات کی ضرورت ہے کہ اُ² ع − ۱۲ ھ² اور ۲ ھ ع − ۱۲ اُ جے دونوں منفی ہوں ۔

(242)

# بارھواں باب

## ملتف اعداد اور ملتف متغیر

۱۱۴ـ **ملتف اعداد ـ ترسیمی تعبیر**ـ ابواب گذشتہ میں اکثر ایسی مثالوں سے واسطہ رہا ہے جنمیں عددی مساواتوں کے حل میں ا + ب $\sqrt{-1}$ کے شکل کی مقداریں واقع ہوئی ہیں جو منفی عدد کا جذر المربع نکالنے پر مشتمل ہیں۔ ایسے جملہ کو جسمیں ا مثبت یا منفی حقیقی اکائیاں اور ب مثبت یا منفی خیالی اکائیاں شامل ہوں ملتف عدد کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵)۔ خیالی اکائی $\sqrt{-1}$ کو اختصاراً خ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ حقیقی اور خالص خیالی اعداد دونوں جملہ ا + خ ب میں شامل ہیں کیونکہ قبل الذکر اعداد یعنی حقیقی اعداد ب = ۰ رکھنے اور ثانی الذکر ا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ ملتف اعداد پر تمام معمولی حسابی اعمال جاری ہو سکتے ہیں اور کسی ایسے حسابی عمل کے نتیجہ میں خ کی ایک سے بڑی صحیح قوتوں کو ربط خ$^2$ = -۱ کی مدد سے مختصر کیا جا سکتا ہے۔

اب ہم ملتف اعداد کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کرتے ہیں جو اُن تفاعلوں کے سمجھنے میں بہت سہولت پیدا کر دیگا جنمیں اس قسم کی مقداریں شامل ہوتی ہیں۔

جملہ ا + خ ب کو شکل

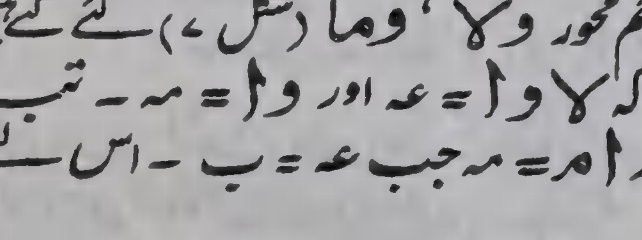
مہ(جم عہ + خ جب عہ)

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\text{مہ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}\,,\quad \text{جم عہ} = \frac{\text{ا}}{\text{مہ}}\,,\quad \text{جب عہ} = \frac{\text{ب}}{\text{مہ}}$$

مقدار مہ کو ملتف عدد ا + خ ب کا **مقیاس** اور زاویہ عہ کو **سعت** کہتے ہیں۔ مقیاس کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے اور جذر کی منفی علامت سعت کو بقدر π کے بڑھانے کے جواب میں ہے۔

فرض کرو کہ علی القوائم محور و لا، و ما (شکل ۷) لئے گئے ہیں (250)
اور ا ایک ایسا نقطہ ہے کہ لا و ا = عہ اور و ا = مہ۔ تب و م = مہ جم عہ = ا اور ا م = مہ جب عہ = ب۔ اس لئے جملہ ا + خ ب کو ترسیمی طور پر اُس خط مستقیم سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو و سے ا تک کھینچا گیا ہو جس کے محدد ثابت محوروں کے لحاظ سے ا، ب ہیں۔ مبدأ سے اِس نقطہ کا فاصلہ و ا ملتف عدد کے مقیاس کے مساوی ہے اور زاویہ لا و ا اُس کی سعت کے مساوی۔




شکل (۷)

ملتف عدد کی مقدار کا اندازہ اس کے مقیاس کی مقدار سے کیا جاتا ہے۔ جب ملتف عدد معدوم ہوتا ہے (یعنی جب ا اور ب جداگانہ صفر ہوتے ہیں) تو اس کا مقیاس بھی معدوم ہو جاتا ہے اور اس کے برعکس جب مقیاس معدوم ہوتا ہے تو چونکہ $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = 0$، ا اور ب کو جدا جدا صفر ہونا چاہئے اس لئے خود ملتف عدد بھی معدوم ہو جاتا ہے۔ ایسے دو عدد ا + خ ب اور اَ + خ بَ مساوی

ہونگے جبکہ ا = اَ اور ب = بَ یعنی جبکہ ان کے مقیاس باہم مساوی ہوں اور جبکہ سعت یا تو باہم مساوی ہوں یا ۲ π کے ضعف کا فرق رکھیں۔

اختصار کی خاطر آیندہ ا + خ ب کے مقیاس اور سعت کو ترقیم

مق (ا + خ ب)، سعت (ا + خ ب)

سے تعبیر کیا جائیگا۔

**۱۱۵ — ملتف اعداد — جمع اور تفریق** — فرض کرو کہ دوسرا ملتف عدد اَ + خ بَ خط مستقیم و اَ سے تعبیر ہوتا ہے اور اسلئے

و اَ = مق (اَ + خ بَ)، ∠ لا و اَ = سعت (اَ + خ بَ)

اب ہم حاصل جمع

ا + خ ب + اَ + خ بَ

کو تعبیر کرنیکا طریقہ متعین کرتے ہیں۔

اس مجموعہ کو شکل ا + اَ + خ (ب + بَ) میں لکھنے سے (251)
دفعہ ۱۱۴ کی ترقیم کی بموجب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک ایسے خط مستقیم سے تعبیر ہوگا جو مبدأ سے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جس کے محدد ا + اَ، ب + بَ ہیں۔ اس نقطہ کو معلوم کرنے کے لئے ا ب کو و اَ کے متوازی اور مساوی کھینچو تو چونکہ ا پ، ب پ علی الترتیب اَ، بَ کے مساوی ہیں ب مطلوبہ نقطہ ہے اور

و ب = مق {ا + اَ + خ (ب + بَ)}،

∠ لا و ب = سعت {ا + اَ + خ (ب + بَ)}

اسلئے دو ملتف عددوں کو جمع کرنے کے لئے ہم و ا کھینچتے ہیں جو انمیں سے ایک کو تعبیر کرتا ہے اور اس کے سرے پر ا ب کھینچتے ہیں جو دوسرے کو تعبیر کرتا ہے (یعنی اس طور پر کہ اسکا طول دوسرے عدد کے مقیاس کے مساوی ہو اور و لا کے ساتھ یہ خط جو زاویہ بنائے

وہ اُس کی سمت کے مساوی ہو)۔ تب و ب اِن دو ملتف عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کریگا۔

اب چونکہ و ب، و ا + ا ب سے بڑا نہیں ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو ملتف عددوں کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ اس کے مساوی) ہوتا ہے۔

اس طریقہ تعبیر کو اس قسم کی مقداروں کی کسی تعداد کا مجموعہ معلوم کرنے میں توسیع دیجاسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے ملتف عدد اً + خ بً کو جمع کرنے کے لئے جو و اً سے تعبیر ہوتا ہے ہم ب اج و اً کے متوازی اور مساوی کھینچتے ہیں اور و ج کو ملاتے ہیں۔ تب و ج تین ملتف اعداد و ا، و ا، و اً کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم عام طور پر یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ملتف مقداروں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مقیاس اِن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ مساوی) ہوتا ہے۔

تفریق کو بھی اسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ و ب سے و ا اور و ا کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، و ا سے و ب اور و ا کا فرق تعبیر ہوگا۔ اس لئے دو ملتف عددوں کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے سرے پر ہم ایک خط کھینچتے ہیں جو دوسرے عدد کو تعبیر کرنیوالے خط کے متوازی اور مساوی ہے مگر مخالف سمت میں (یعنے ایسی سمت میں جو و لا کے ساتھ دوسرے کی سمت سے بقدر π کے زیادہ بڑا زاویہ بناتی ہے)۔ اس خط کے سرے کو ہم و سے ملاتے ہیں تاکہ دئے ہوئے دو ملتف عددوں کے فرق کو تعبیر کرنیوالا خط ملجائے۔

**۱۱۶ ۔ ضرب اور تقسیم ۔** دو ملتف عدد ا + خ ب ، اَ + خ بَ کو ضرب دینے کے لئے ان کو ہم اس شکل میں لکھتے ہیں

ا + خ ب ≡ مہ (جم عہ + خ جب عہ) ، اَ + خ بَ ≡ مہَ (جم عہَ + خ جب عہَ)

تو ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے (252)

(ا + خ ب)(اَ + خ بَ) = مہ مہَ {جم (عہ + عہَ) + خ جب (عہ + عہَ)}

**جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا حاصل ضرب ایک ملتف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کا مجموعہ ۔**

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کا حاصل ضرب ایک ملتف مقدار ہے جسکا مقیاس تمام مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت تمام سعتوں کا مجموعہ ۔

ا + خ ب کو اَ + خ بَ سے تقسیم کرنیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

(ا + خ ب) / (اَ + خ بَ) ≡ (مہ / مہَ) {جم (عہ - عہَ) + خ جب (عہ - عہَ)}

**جس سے ثابت ہے کہ دو ملتف عددوں کا خارج قسمت ایک ملتف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کے خارج قسمت کے مساوی ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کے فرق کے مساوی ۔**

دفعہ ۱۱۶ کے مسئلہ کے ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ جب اجزائے ضربی (خیالی یا حقیقی) کی کسی تعداد کا حاصل ضرب معدوم ہوتا ہے تو

ان میں سے ایک جزو ضربی کو معدوم ہونا چاہئیے۔ جب تمام اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو یہ مسئلہ بالکل واضح ہے اور اوپر جو کچھ ثابت ہوا اس سے اُسوقت بھی جبکہ اجزائے ضربی ملتف ہوں یہی نتیجہ برقرار رہتا ہے کیونکہ حاصل ضرب کا مقیاس اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جب اِن میں سے کوئی جزو ضربی معدوم ہو اور اس لئے وہ ملتف مقدار معدوم ہونی چاہئیے جسکا یہ جزو ضربی مقیاس ہے۔

۱۱۷۔ **ملتف عددوں پر دوسرے اعمال۔** پچھلے مسئلوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عدد کی کوئی صحیح قوت شکل ا + خ ب میں بیان کیجا سکتی ہے جہاں ا اور ب حقیقی ہیں۔ اور زیادہ عام صورت میں اگر کسی منطق صحیح تفاعل

$$ا_. ی^ن + ا_۱ ی^{ن-۱} + \dots + ا_{ن-۱} ی + ا_ن$$

میں جس کے سر ملتف (بشمول حقیقی) عدد ہیں ی کی بجائے ملتف مقدار ا + خ ب درج کیجائے تو نتیجہ کو معیاری شکل ا + خ ب میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ (228)

اس باب میں ملتف عددوں کے ایسے تفاعلوں پر بحث کرنا مقصود نہیں ہے جو منطق صحیح تفاعلوں کی اُس نوع میں داخل نہیں ہیں جس سے ہمیں ابتک واسطہ رہا ہے۔ لیکن ڈیموایر کے مسئلہ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ علم الحساب کے بقیہ اعمال سے ہر صورت میں مثلاً کسری یا ملتف قوت نما پر اٹھانے لوگارتم لینے اور اُن قوتوں پر اٹھانے سے جن کی اساس اور قوت نما دونوں ملتف ہوں ایک ملتف عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ ملتف عدد ایک ایسا نظام یا گروہ بناتے ہیں جو خود مکمل ہے۔

۱۱۸۔ **ملتف متغیر۔** اس کتاب کے ابتدائی ابواب میں کثیر الارقام کے

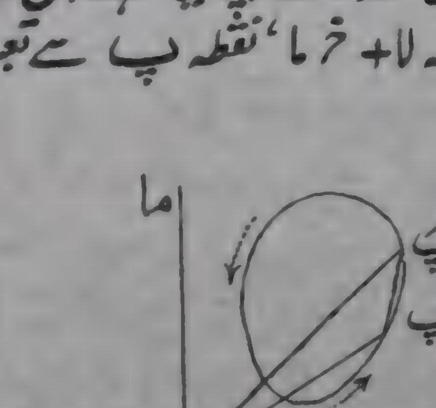
تغیر کا مطالعہ متغیر کی $-\infty$ سے $+\infty$ تک حقیقی قیمتوں میں سے گذرنے کے جواب میں کیا گیا تھا اور کثیر الارقام کی شکل کو ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کیا گیا تھا۔ یہ فی الحقیقت اُس عام کثیر الارقام کی ایک خاص صورت ہے جس پر اب بحث کیجائیگی۔

فرض کرو کہ ی میں ایک منطق اور صحیح تفاعل دیا گیا ہے جس کے سر حقیقی یا ملتف عدد ہیں یعنی

$$ف(ی) \equiv ا_{0}ی^{ن} + ا_{1}ی^{ن-1} + ا_{2}ی^{ن-2} + \cdots + ا_{ن-1}ی + ا_{ن}$$

ہم اس کے تغیرات کا مطالعہ ی کی مختلف قیمتوں کے جواب میں کر سکتے ہیں جہاں ی ملتف شکل لا + خ ما میں ہے اور جہاں لا اور ما دونوں تمام ممکن حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں۔ اس شکل لا + خ ما کو ہم ملتف متغیر کہینگے۔ ظاہر ہے کہ اس متغیر کی تمام ممکن حقیقی قیمتیں لا + خ ما کی قیمتوں میں شامل ہیں کیونکہ یہ وہ قیمتیں ہیں جو لا کو بدلنے اور ما = ۰ رکھنے سے پیدا ہوتی ہیں۔ دفعہ ۱۱۴ کے اصولوں کی بموجب ہم ملتف متغیر لا + خ ما کو خط و پ (شکل ۸) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ایک ثابت نقطے و سے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہے جس کے محدد لا، ما ہیں۔ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ لا + خ ما نقطہ پ سے تعبیر ہوتا ہے۔

(254) اِس طور پر لا + خ ما کی تمام ممکن قیمتیں مستوی میں کے تمام نقطوں سے تعبیر ہونگی۔ اب چونکہ ی کی کسی مخصوص قیمت کے لئے ف(ی)،



شکل ا + خ ب (دفعہ ۱۱۰) اختیار کرتا ہے اس لئے ف (ی) کی قیمتوں کو اسی طرح ایک دوسرے مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ اس دفعہ میں ہم صرف خود متغیر لا + خ ما کی تعبیر کی طرف اپنی توجہ محدود رکھینگے جس میں ہم لا + خ ما کے تغیر کو مسلسل طور پر واقع ہوتا ہوا تصور کرینگے۔ مثلاً نقطہ لا، ما ایک منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر و پ اور و پَ سے متغیر کی دو متصل قیمتیں تعبیر ہوں تو ہم متناظر قیمتوں لا + خ ما، لاَ + خ ماَ کو طریقۂ ذیل پر لکھتے ہیں:-

ی ≡ لا + خ ما ≡ ر (جم طہ + خ جب طہ)

یَ ≡ لاَ + خ ماَ ≡ رَ (جم طہَ + خ جب طہَ)

اب چونکہ و پَ سے و پ اور پ پَ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے (دفعہ ۱۱۵) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ پَ، ی کے اضافہ کو تعبیر کرتا ہے اور اگر یَ = ی + ھ تو ھ کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:-

ھ ≡ غہ (جم فہ + خ جب فہ)

جہاں غہ = پ پَ اور فہ وہ زاویہ ہے جو پ پَ، و لا کے ساتھ بناتا ہے۔

ی کے مقیاس کا تغیر و پَ - و پ ہے یا رَ - ر اور اسکی سعت کا تغیر پَ و پ ہے یا طہَ - طہ۔ خود ی کا تغیر جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ھ ہے یا غہ (جم فہ + خ جب فہ)۔

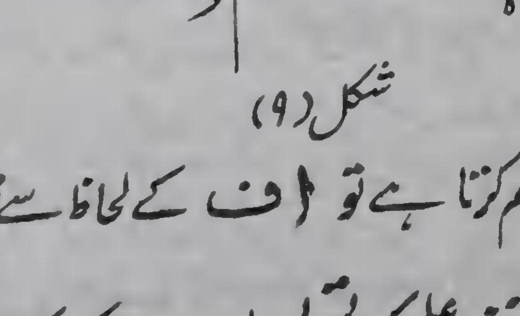
فرض کرو کہ نقطہ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے۔ جب وہ اپنے ابتدائی مقام پ پر واپس پہنچتا ہے تو مقیاس پھر اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتا ہے اور سعت اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتی ہے اگر نقطہ و منحنی کے باہر ہو یا بقدر ۲ ط کے بڑھ جاتی ہے اگر و منحنی کے اندر ہو۔

اگر ملتف متغیر ایک ہی خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرے تو اسکی سعتوں کے تغیرات مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں یعنی کل تغیر صفر کے مساوی ہوتا ہے۔ اس سے ہم ملتف متغیر کی سعت کے

تغیر کی ایک خاصیت اخذ کر سکتے ہیں جو آئندہ مشاہدات میں اہم ثابت ہوگی۔

فرض کرو کہ ایک مستوی رقبہ خطوط ب د، اف، ع ج وغیرہ سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے (شکل ۹) تو پورے رقبہ کے محیط

(255) کے لحاظ سے سعت کا تغیر جزوی رقبوں کے محیطوں کے لحاظ سے اس کے تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام رقبے متغیر کے ایک ہی سمت میں حرکت کرنے سے مرتسم ہوئے ہیں۔ یہ نتیجہ بدیہی ہے کیونکہ جب نقطہ تمام رقبوں کو ایک ہی جہت میں مرتسم کرتا ہے تو تقسیم کرنیوالے اندرونی خطوں میں سے ہر ایک دو بار مرتسم ہوتا ہے مگر مخالف سمتوں میں اور بیرونی محیط صرف ایک مرتبہ مرتسم ہوتا ہے پس سعت کا مجموعی تغیر تقسیم کرنیوالے خطوں کے لحاظ سے صفر کے مساوی ہے اور بیرونی محیط کے لحاظ سے اسکا جو تغیر ہے صرف وہی باقی رہتا ہے۔ مثال کے طور پر شکل میں رقبوں اب ف، اف د پر غور کرو۔ جب نقطہ ان رقبوں کو تیروں سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرتسم کرتا ہے تو اف کے لحاظ سے مجموعی تغیر صفر ہے۔



شکل (۹)

۱۱۹۔ **ملتف متغیر کے تفاعل کا تسلسل۔** فرض کرو کہ ملتف متغیر ی ایک ثابت قیمت می سے شروع کر کے ایک چھوٹا اضافہ ہ ≡ غہ (جم فہ + خر جب فہ) حاصل کرتا ہے۔ تب اگر ف (ی) دیا ہوا

تفاعل ہو تو دفعہ ٦ کے پھیلاؤ میں لا کی بجائے ی رکھنے سے

$$ف(ی) = ف(ی. + ھ) = ف(ی.) + فَ(ی.) ھ + \frac{فً(ی.)}{١ \times ٢} ھ^{٢} + \ldots$$

اور ف (ی) میں اضافہ جو ف (ی. + ھ) - ف (ی.) کے مساوی ہے

$$فَ(ی.) ھ + \frac{فً(ی.)}{١ \times ٢} ھ^{٢} + \frac{فٌ(ی.)}{١ \times ٢ \times ٣} ھ^{٣} + \ldots\ldots$$

ہوگا۔

اس جملہ میں ھ کی قوتوں کے سر سب کے سب معمولی شکل کے ملتف جملے ہیں اور اگر ان کے مقیاس ا، ب، ج وغیرہ ہوں تو متواتر رقموں کے مقیاس ا غہ، ب غہ$^{٢}$، ج غہ$^{٣}$، وغیرہ ہیں اور چونکہ دفعہ ۱۱۵ کی رو سے مجموعہ کا مقیاس، مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس

$$ا غہ + ب غہ^{٢} + ج غہ^{٣} + \ldots\ldots$$

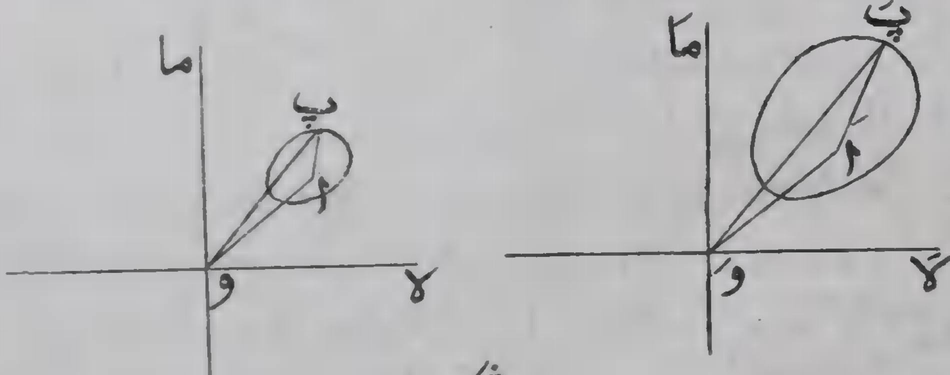
سے کم ہے۔

اب غہ کو ایسی قیمت دیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) جس کے لئے یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے اس جملہ کی قیمت کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف متغیر کے لا انتہا چھوٹے تغیر کے جواب میں (یعنے اس تغیر کے جواب میں جس کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو) تفاعل میں بھی لا انتہا چھوٹا تغیر واقع ہوتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر (256)

**تفاعل ملتف متغیر کے تغیر کے ساتھ ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔**

**۱۲۰۔ ف (ی) کی سعت کا تغیر جب ملتف متغیر ایک چھوٹا بند منحنی مرتسم کرے۔** ی کی قیمتوں کے ایک مسلسل سلسلہ کے

جواب میں ف (ی) کی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ ملتا ہے جنکو خود ی کی قیمتوں کی طرح، ایک مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ نقطوں کے اِن سلسلوں کو ہم ایک دوسرے سے قریب دو شکلوں سے تعبیر کرتے ہیں (شکل ۱۰) جنکے متعلق یہ فرض کرلیا جاسکتا ہے کہ




شکل (۱۰)

وہ مختلف مستویوں پر کھینچے گئے ہیں تاکہ غلط فہمی واقع نہ ہو۔

لا + خ ما کو تعبیر کرنے والے ہر نقطہ پ کے جواب میں ف (ی) کو تعبیر کرنیوالا ایک معین نقطہ پَ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے جب، پ، ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے تو پَ بھی ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے اور جب، پ ایک بند منحنی کو مرتسم کرنے کے بعد اپنے ابتدائی مقام پر لوٹتا ہے تو پَ بھی اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے۔

فی الحال ہمارا مقصد ف (ی) کی سعت کے تغیر پر بحث کرنا ہے جبکہ، پ ایک بند منحنی مرتسم کرے۔ فرض کرو کہ ا کوئی معین
نقطہ ہے جس کے محدد لا. ما. یعنی ی. = لا. + خ ما. ہیں۔ ہم بحث (257)
کو دو صورتوں میں تقسیم کرتے ہیں:-

(۱) جبکہ لا. + خ ما.، ف (ی) = ۰ کی اصل نہ ہو یعنی جبکہ ف (ی.) سے مختلف ہو۔

(۲) جبکہ لا. + خرما. ف(ی) = ۰ کی اصل ہو یا ف(ی.) = ۰
پہلی صورت میں نقطہ ا کے جواب میں ایک نقطہ اَ ایسا موجود ہوتا ہے جو ف(ی.) کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے اور وَ اَ صفر سے مختلف ہوتا ہے۔ فرض کرو ی = ی. + ھ جہاں ھ ≡ غہ (جم فہ + خر جب فہ) اور مان لو کہ پ جو ی کو تعبیر کرتا ہے ایک چھوٹا بند منحنی ا کے گرد مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ پَ ف(ی) کو تعبیر کرتا ہے تو اَپَ سے ف(ی) کا اضافہ ی کے اضافہ اپ کے جواب میں تعبیر ہوگا۔ اب دفعہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ غہ کو اتنی چھوٹی قیمتیں دیجا سکتی ہیں کہ ف(ی) کے اضافہ کا مقیاس یعنی اَپَ ہمیشہ کسی مقررہ مقدار وَ اَ سے چھوٹا ہو۔ پس یہ فرض کر لیا جا سکتا ہے کہ پ، ا کے گرد اتنا چھوٹا بند منحنی مرتسم کرتا ہے کہ اس کے متناظر پَ سے مرتسم شدہ بند منحنی وَ کے باہر ہو۔ اسلئے دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ سے اگر ایک چھوٹا بند منحنی مرتسم ہو جسمیں کوئی ایسا نقطہ شامل نہیں ہے جو ف(ی) = ۰ کو پورا کرتا ہے تو ف(ی) کی سعت کا کُل تغیر کچھ نہیں ہوتا۔

(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ لا. + خر ما. مساوات ف(ی) = ۰ کی ایک اصل ہے جو م مرتبہ تکرار پاتی ہے اور فرض کرو کہ

ف(ی) ≡ (ی − ی.)^م پہ(ی)

تب

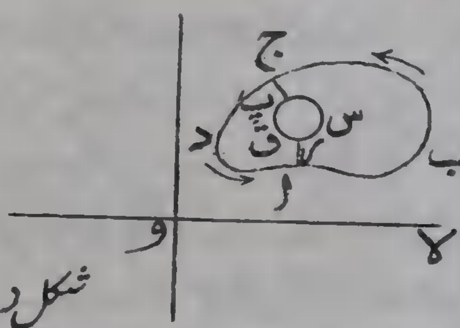
ف(ی) = ھ^م پہ(ی) = غہ^م (جم م فہ + خر جب م فہ) پہ(ی)

اس صورت میں وَ اَ = ۰۔ اور جب پ، ا کے گرد ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو پَ اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہوتا ہے اور ف(ی) کی سعت بقدر ۲ ∏ ۲ کے ضعف کے بڑھ جاتی ہے جسکو طریقہ

ذیل پر متعین کیا جا سکتا ہے :- مساوات بالا سے
سعت ف (ی) = م فہ + سعت پہ (ی)
اور سعت ف (ی) کا اضافہ، م فہ کے اضافہ میں سعت پہ (ی) کا اضافہ جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اب یہ دوسرا اضافہ (۱) کی رو سے کچھ نہیں کیونکہ پ سے جو بند منحنی مرتسم ہوتا ہے اس کے متعلق یہ فرض کرلیا جا سکتا ہے کہ اس میں پہ (ی) = ۰ کی کوئی اصل شامل نہیں ہے۔ اور چونکہ فہ کا اضافہ، پ کی ایک گردش میں ۲ ٹ ہوتا ہے اس لئے م فہ کا اضافہ ۲ م ٹ ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب، پ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جسمیں مساوات ف (ی) = ۰ کی ایک اصل م رتبہ والی شامل ہے تو ف (ی) کی سعت میں بقدر ۲ م ٹ کے اضافہ ہوتا ہے۔

**۱۲۱۔ کوشی کا مسئلہ۔** جب، ی، ایک مستوی میں ایک ہی خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے تو اس کے جواب میں ف (ی) اپنے مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے اور سعت ف (ی) میں مساوی اور مخالف تغیرات واقع ہوتے ہیں۔ اسلئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مستوی رقبہ کو دفعہ ۱۱۸ کی طرح حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سعت ف (ی) کا تغیر جو اسی جہت میں ی سے مرتسم شدہ تمام جزوی رقبوں کے جواب میں ہے سعت ف (ی) کے اس تغیر کے مساوی ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ بیرونی محیط کے جواب میں ہے۔ اب فرض کرو کہ مستوی لا ما کیں کوئی محیط مرتسم ہوا ہے اور پہلے یہ فرض کرو کہ اس میں ایسا کوئی نقطہ شامل نہیں ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کو پورا کرتا ہو۔ اسکو متعدد چھوٹے رقبوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جنمیں سے ہر ایک کے لئے دفعہ ۱۲۰ کی

صورت (۱) کے نتائج قائم رہتے ہیں اور جو کچھ کہ ابھی ثابت کیا گیا ہے اُس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سعت ف (ی) کا تغیر جو ی سے مرتسم شدہ بند محیط کے جواب میں ہے کچھ نہیں ہے۔




شکل (۱۱)

دوسرے یہ فرض کرو کہ بند محیط میں ایسا نقطہ شامل ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کی اصل ہے اور یہ اصل م مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے گرد ایک چھوٹا بند منحنی پ ق ر س کھینچا گیا ہے۔ اب ف (ی) کی سعت کا تغیر جو ی سے مرتسم شدہ پورے محیط کے متناظر ہے اسکے اُن تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جو رقبوں ا ب ج پ س ر ج د ا ر ف پ، پ ق ر س کی ترسیم کے متناظر ہیں۔

پہلے دو تغیرات جو کچھ کہ اوپر ثابت ہوا اُس کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور آخر کا تغیر، دفعہ ۱۲۰، (۲) کی رو سے ۲ م π کے مساوی ہے۔

پس ف (ی) کا مجموعی تغیر ۲ م π ہے۔ اسی طرح اگر رقبہ میں ایسے
اور نقطے بھی شامل ہوں جو مَ، مً، وغیرہ مرتبہ تکرار پانیوالی اصلوں کے (259)
جواب میں ہیں تو مجموعی تغیر = ۲ (م + مَ + مً + ....) π ۔ پس ہم مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں جو کوشی سے منسوب کیا جاتا ہے:۔

ایک دئے ہوئے رقبہ کے اندر کسی کثیر الارقام کی اصلوں کی تعداد، اس کثیر الارقام کی سعت کے مجموعی تغیر کو جو ملتف متغیر سے اُس رقبہ کے محیط کی تکمیل ترسیم کے جواب میں ہے ۲ π سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۲۲ - عام مساوات کی اصلوں کی تعداد - دفعات ماسبق کے ثابت شدہ اصولوں کی مدد سے ہم وہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں جس کا ذکر دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں کیا گیا تھا یعنے ہر ن ویں درجہ کی منطق اور مکملہ مساوات کی ن خیالی یا حقیقی اصلیں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ی کا منطق اور مکملہ تفاعل

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ا}_{0}\,\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\,\text{ی}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{2}\,\text{ی}^{\text{ن}-2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ی} + \text{ا}_{\text{ن}}$$

ہے۔ اب سوائے اس مفروضے کہ ف (ی)، متغیر کی کسی لا متناہی قیمتوں کیلئے معدوم نہیں ہو سکتا ف (ی) = ۰ کی اصلوں کے وجود کے متعلق کوئی اور مفروض اختیار کئے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ ی اپنے مستوی میں اتنا بڑا دائرہ مرتسم کرتا ہے کہ اس کے باہر کوئی اصل وجود نہیں رکھتی۔ تب اگر

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ی}^{\text{ن}} \left\{ \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{یَ} + \text{ا}_{2}\,\text{یَ}^{2} + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{یَ}^{\text{ن}} \right\}$$

$$= \text{ی}^{\text{ن}}\ \text{فہ}(\text{یَ})\text{، جہاں } \text{یَ} = \frac{1}{\text{ی}}$$

تو یَ جسکا مقیاس ی کے مقیاس کا متکافی ہے ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کریگا جسمیں اس مستوی کا ایک ایسا حصہ شامل ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ دائرہ کے باہر واقع ہونیوالے ملتف متغیری کے میدان کے جواب میں ہے اور اسی لئے ف (یَ) = ۰ کی کوئی اصل اس چھوٹے دائرہ کے اندر واقع نہیں ہوگی۔ پس ی سے پورے دائرہ کی ترسیم کے جواب میں ف (یَ) کی سعت کا تغیر = ۰ اور اس لئے

ف (ی) کی سعت کا تغیر = $\text{ی}^{\text{ن}}$ کی سعت کا تغیر

اور اگر

ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) یا یⁿ = رⁿ (جم ن طہ + خ جب ن طہ)

تو طہ بقدر ۲ π کے بڑھ جاتا ہے اور اس لئے یⁿ کی سعت بقدر ۲ ن π کے بڑھ جاتی ہے۔

اب کوشی کے مسئلہ (دفعہ ۱۲۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ی سے مرتسم شدہ دائرہ کے اندر اصلوں کی تعداد یعنے مساوات ف (ی) = ۰ کی کل اصلوں کی تعداد ن ہے اور مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (260)

اس طرح وہ مسئلہ جس کا ثبوت دفعہ ۱۵ میں ملتوی کر دیا گیا تھا کوشی کے مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔ اس لئے کوشی کے مسئلہ کو مساواتوں کے نظریہ میں بنیادی مسئلہ قرار دیا جا سکتا ہے۔ تاہم یہ دیکھنا واجب ہے کہ دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو یعنی ہر عددی مساوات کی ایک عددی اصل ہوتی ہے بالراست کوشی کے مسئلہ کی مدد کے بغیر اُن اصولوں کے ذریعہ ثابت کیا جا سکتا ہے جو دفعہ ۱۱۹ اور دفعات ماقبل میں مذکور رہیں۔ چنانچہ ہم اب اسکو اسی طرح ثابت کرینگے۔

**۱۲۲ — بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت۔** اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ی کی کوئی قیمت ایسی نہیں ہے جو ف (ی) کو معدوم کرتی ہو۔ اور فرض کرو کہ قیمت ی جو نقطہ ا سے تعبیر ہوتی ہے (شکل ۱۰) مبداء و سے دپ کے قریب ترین ممکن محل اُ کے جواب میں ہے۔ اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ اضافہ ھ کو ایسی سمت دیجا سکتی ہے کہ پ ایسے محل میں آجائے جو مبدأ سے ا کی بہ نسبت قریب تر ہو۔

ہم حسب ذیل پھیلاؤ جانتے ہیں (دفعہ ۱۱۹):-

$$ف(ی + ھ) = ف(ی) + فَ(ی) ھ + \frac{فً(ی)}{۱ \times ۲} ھ^{۲} + \ldots\ldots + ا ھ^{ن}$$

بموجب فرض ف (ی.) معدوم نہیں ہوتا لیکن مشتق تفاعلوں فَ (ی.)، فً (ی.)، وغیرہ میں سے ایک یا زیادہ معدوم ہو سکتے ہیں فرض کرو کہ ان میں سے پہلا تفاعل جو معدوم نہیں ہوتا $\text{ف}_{\text{م}}$ (ی.) ہے اور فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ف}_{\text{م}}\,(\text{ی.})}{1\times 2\times 3\times \ldots \times \text{م}} = \text{م}_{\text{م}}\,(\text{جم ع}_{\text{م}} + \text{خ جب ع}_{\text{م}})$$

اور اس کے بعد آنیوالے سروں کے لئے بھی اسی کے متناظر جملے فرض کرلو۔ $\text{ھ}^{\text{م}}$ کے بعد آنیوالی سب رقموں کو ایک ملتف جملہ میں اکٹھا کرکے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}\,(\text{ی.} + \text{ھ}) = \text{ف}\,(\text{ی.}) + \text{م}_{\text{م}}\,\text{غہ}^{\text{م}}\{\text{جم}\,(\text{م فہ} + \text{ع}_{\text{م}}) + \text{خ جب}\,(\text{م فہ} + \text{ع}_{\text{م}})\} + \text{مہ}\,(\text{جم ظہ} + \text{خ جب ظہ})$$

جہاں دفعہ ۱۱۵ کی رو سے

$$\text{مہ} < \text{م}_{\text{م}+1}\,\text{غہ}^{\text{م}+1} + \text{م}_{\text{م}+2}\,\text{غہ}^{\text{م}+2} + \ldots + \text{م}_{\text{ن}}\,\text{غہ}^{\text{ن}}$$

دفعہ ۵ کے مسئلہ سے یہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوتا ہے کہ غہ
کو ایسی قیمت دیجا سکتی ہے جس کے لئے $\text{مہ} < \text{م}_{\text{م}}\,\text{غہ}^{\text{م}}$۔ اب (261)
اضافہ ھ کی سمت مساوات $\text{م فہ} + \text{ع}_{\text{م}} = \text{لاوَ اَ} + \pi$ سے (شکل ۱۰) ایسی منتخب کیجا سکتی ہے جو ف (ی. + ھ) کی قیمت کے دوسرے جملہ کے بناء پر پ کو سمت اَوَ میں مبداء سے بقدر فاصلہ $\text{مہ غہ}^{\text{م}}$ کے قریب تر لائے۔ فرض کرو کہ وَ اَ پر س وہ نقطہ ہے جہاں پ اس طریقہ سے لایا گیا ہے۔ ف (ی. + ھ) کی قیمت میں جو آخری جملہ ہے اُس کا اثر یہ ہوگا کہ پ کو نقطہ س سے حرکت دیکر نقطہ ت تک اس طور پر لائے کہ س ت = مہ اور خواہ اس

حرکت کی سمت کچھ ہی ہو یعنی خواہ سمت ظہ کچھ ہی ہو وَتَ < وَا کیونکہ س ت < س اَ۔ پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اَ مبدا کے لحاظ سے پ کا قریب ترین ممکن محل نہیں ہے اور اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ صفر سے مختلف کوئی اور دوسری قیمت ف (ی) کے مقیاس کی کم سے کم ممکن قیمت نہیں ہو سکتی۔

اس ثبوت میں جو اوپر دیا گیا ہے صرف یہ بتایا گیا ہے کہ مساوات کی اصل ہونی چاہئے لیکن اصلوں کی ٹھیک تعداد متعین نہیں کی گئی جیسا کہ اس ثبوت میں کی گئی ہے جسکا ماخذ گوشی کا مسئلہ ہے۔ تاہم جب یہ ثابت کر دیا گیا کہ کم از کم ایک اصل موجود ہونی چاہئے تو ثبوت کی تکمیل آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۲ کے طریقہ سے ہو سکتی ہے۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب ی کی کسی مخصوص قیمت کیلئے فَ (ی.) معدوم نہیں ہوتا تو ف (ی) کے اضافہ کو ھ کے ساتھ جو نسبت ہے اُس کی انتہائی قیمت مستقل فَ (ی.) = م۱ (جم ع۱ + خرجب ع۱) ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ ماخوذ ہو سکتا ہے کہ ان دونوں اضافوں کا درمیانی زاویہ مستقل ہوتا ہے اور ان کے مقیاس مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ اس کو عام طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے کہ پ اور پ سے مرتسم شدہ شکلیں اپنے لاانتہا چھوٹے حصوں میں ایک دوسرے کے متشابہ ہیں۔

اس دفعہ کے مضمون پر مزید تحقیق مطلوب ہو تو کتاب کے آخر میں نوٹ ج کا مطالعہ کیا جائے۔

## ۱۲۴۔ ملتف عددی اصلوں کی تعیین۔ کعبی کا حل۔

مساواتوں کے نظریہ پر جو تصنیفات موجود ہیں اُن میں مساواتوں کی ملتف عددی اصلوں کو عملی طور پر متعین کرنے کی طرف بہت کم توجہ کی گئی ہے اور نہ یہ آسان ہے کہ ابتدائی درسی کتاب میں جسمیں عام

طریقے درج ہوں اسکی وضاحت خاطر خواہ کیجا سکے۔ نظری طور پر اس
(262) مسئلہ میں کوئی اشکال نہیں کیونکہ اگر ف (لا + خ ما) کے حقیقی اور
خیالی حصے جداگانہ صفر کے مساوی رکھے جائیں اور محصلہ دو مساواتوں
سے کسی ایک متغیر کو ساقط کر دیا جائے تو ایک مساوات حاصل ہوگی
جس سے دوسرے متغیر کی حقیقی قیمت ہارنر کے عمل سے محسوب
کیجا سکتی ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طریقہ کی عملی قدر و قیمت کچھ بھی
نہیں ہے*۔

جی
ہم اس دفعہ اور دفعات آیندہ میں اپنی توجہ صرف کعبی اور چار درجی
مساواتوں تک محدود رکھینگے جن کے سر حقیقی اعداد ہوں۔ ان مثالوں
میں صرف اس عمل حسابی کو پیش کیا جائیگا جو عملی مقاصد کے لئے سادہ
ترین شکل رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ حل کے لئے مساوات

ف (لا) ≡ لا۳ + ف لا۲ + ق لا + ر = ۰

تجویز کیگئی ہے۔ اس کی اصلوں کو ع، ھ + ک، ھ - ک مان لیا
جاسکتا ہے جنمیں ع حقیقی ہے اور باقی اصلوں کی نوعیت خود اثنائے

---

* طالب علم اگر ماہرین ریاضی کی اُن کوششوں کا مطالعہ کرنا چاہیں جو انہوں نے عددی مساواتوں کی ملتف اصلوں کو دریافت کرنیکے لئے کی ہیں تو وہ حسب ذیل کتابوں سے مدد لے سکتے ہیں۔ ۱۔ لگرانج ا۔ مقالہ برائے حلِ عددی مساوات۔ ۲۔ مرفی:۔ جبری مساواتوں کا نظریہ ۳:۔ سائمن سٹپنز ا:۔ عددی مساواتوں کا عام حل (ویں سنہ ۱۸۵۱) ۴۔ پی سی۔ پلیننگ:۔ اعلیٰ عددی مساواتوں کا حل (مطبوعہ لائبزک سنہ ۱۸۶۵) ایمری ملیا کلنٹوک:۔ وقت واحد میں کسی مساوات کے تمام اصلوں کو دریافت کرنے کا طریقہ۔ (امریکن جرنل آف میاتھمیاٹکس جلد ۱۷ شمارہ ۱ و ۲) ۶۔ ایم۔ اِی۔ کاروالو۔ جبری یا ماورائی مساواتونکا مکمل عددی حل دریافت کرنے کا عملی طریقہ" (مطبوعہ پیرس سنہ ۱۸۹۶ء)۔

عمل حساب میں معلوم ہو جائے گی کیونکہ ک کی تعین اس کے مربع سے ہوتی ہے جو ممکن ہے منفی ہو یا مثبت۔ مساوات کی کوئی ابتدائی تحلیل ضروری نہیں۔ اگر لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور ک کی جفت اور طاق قوتوں کے مجموعوں کو جداگانہ صفر کے مساوی رکھا جائے (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۲۴) تو ہمیں فوراً ذیل کی مساوات ملجاتی ہے:-

$$-ک^{۲} = فَ(ھ) = ۳ھ^{۲} + ۲ف ھ + ق$$

نیز ک ساقط کرنے سے ھ کو متعین کرنے کے لئے ایک کعبی مساوات حاصل ہوتی ہے لیکن اس مساوات کو بنانے کی ضرورت نہیں پڑے گی کیونکہ ھ کو سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مساوات عہ + ۲ ھ = - ف سے معلوم کیا جا سکتا ہے جبکہ عہ کو سب سے پہلے ہارنر کے طریقہ سے حسب معمول دریافت کرلیا گیا ہو۔

آخر میں ک کا محسوب کرنا ضروری ہے اور اس کے ساتھ (263)
باقی دو اصلوں کا خواہ وہ خیالی ہوں یا حقیقی۔ اس مقصد کیلئے ذیل کا طریق عمل سہولت بخش ہوگا:-

سروں کے رقوم میں $\Sigma$ فَ(عہ) کی قیمت $ف^{۲} - ۳ق$ ہے یعنی

$$فَ(عہ) + فَ(ھ + ک) + فَ(ھ - ک) = ف^{۲} - ۳ق$$

نیز
$$فَ(ھ + ک) + فَ(ھ - ک) = ۲فَ(ھ) + ۶ک^{۲}$$

اسلئے
$$فَ(عہ) + ۴ک^{۲} = ف^{۲} - ۳ق$$

جس سے $ک^{۲}$ کو بہت تھوڑی محنت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے کیونکہ فَ(عہ) کی عددی قیمت، ہارنر کے تکمیل یافتہ عمل میں جو آخری استحالہ ہے اُس میں آخر سے دوسرے سر سے

لکھی جا سکتی ہے ۔ باقی دو اصلوں کی نوعیت اس طور پر حاصل شدہ عدد کی علامت پر منحصر ہوگی اور اس عدد کے مثبت اور منفی جذر المربع لینے سے خود اصلیں معلوم ہو جائینگی ۔

# مثالیں

۱ ـ مساوات

لا^۳ + ۲لا^۲ ـ ۲۲لا ـ ۷۰ = ۰

کو حل کرو۔

سب سے پہلے مثبت حقیقی اصل معلوم کرو جو ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کو مکمل کرنے سے حاصل ہوگی اور آخری استحالہ کے سر ہونگے ۔

۴۴۲۴۱۸۹۶ ـ، ۷۶۶۰۹۸۶۸، ۱۷۴۰۲ ۱

یہ ذہن نشین رکھکر کہ اصلوں کو تین مرتبہ ۱۰ سے ضرب دیا گیا ہے ہم ف (عہ) اور فَ (عہ) کی قیمتیں پہلی صورت میں داہنی طرف سے نو ہندسے اور دوسری صورت میں چھ ہندسے کاٹنے اور علامت اعشاریہ لگانے سے معلوم کرتے ہیں ۔ بہتر یہ ہوگا کہ مختصر طریقہ سے تقریب کو اور دو منزلوں تک لیجا کر فَ (عہ) کی زیادہ صحیح قیمت معلوم کیجائے چنانچہ اس طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

فَ (عہ) = ۷۶،۶۲۸۶

اسکو فَ^۲ ـ ۳ق (جو ۷۳ کے مساوی ہے) میں سے تفریق کرنے سے

۴ک^۲ = ـ ۳،۶۲۸۶

اب چونکہ یہ منفی ہے اسلئے یہ ثابت ہوگیا کہ باقی دو اصلیں خیالی ہیں ۔ عہ کی حاصل شدہ قیمت ۵،۱۳۴۵۷ سے ھ کی قیمت فوراً ۳،۵۶۷۲ ـ ملجاتی ہے اور ۳،۶۲۸۶ کو ۴ سے تقسیم کرنے اور اسکا (264)
مربع لینے سے بالآخر مساوات کی ملتف اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں جو یہ ہیں

$-۳،۵۶۷۲ \pm ۰،۹۵۲۴ \sqrt{-1}$

۲ — نیوٹن کے کعبی (دیکھو دفعہ ۱۰۷)

$لا^{۳} - ۲لا - ۵ = ۰$

کو پوری طرح حل کرو۔

ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کی تکمیل کرنے اور مثال ماسبق کی طرح عمل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں عہ = ۲،۰۹۴۵۵ اور

$فَ(عہ) = ۱۱،۱۶۰۷۸$

پس

$ک^{۲} = -۱،۲۹۰۱۹۵$

اور باقی دو اصلیں (جنکا خیالی ہونا ثابت ہے) حاصل ہوتی ہیں

$-۱،۰۴۷۲۷ \pm ۱،۱۳۵۹۴ \sqrt{-1}$

۳ — دفعہ ۱۰۹ صفحہ ۳۴۹ کی مثال ۱

$لا^{۳} + لا^{۲} + لا - ۱۰۰ = ۰$

کی باقی دو اصلیں معلوم کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

$فَ(عہ) = ۶۴،۰۸۴۱$، $ک^{۲} = -۱۶،۵۲۱۰۲$

اور مطلوبہ اصلیں ہیں

$-۲،۶۳۲۲ \pm ۴،۰۵۴۶ \sqrt{-1}$

۴ — مساوات

$۲۰لا^{۳} - ۲۴لا^{۲} + ۳ = ۰$

کو حل کرو۔

۲۰ سے تقسیم کرو اور مساوات $لا^{۳} - ۱،۲ لا^{۲} + ۰،۱۵ = ۰$ کی وہ اصل ہارنر کے طریقہ سے معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے تو معلوم ہوگا کہ عہ = ۰،۴۴۶۰۳۶۶ اور فَ(عہ) = -۰،۴۷۳۶۴ اس لئے

$۴ک^{۲} = ف^{۲} - ۳ق - فَ(عہ) = ۱،۴۴ + ۰،۴۷۳۶۴$

پس کَ$^{۲}$ = ۱۴۱۸۷۴ ، اور اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں۔ ہم حاصل کرتے ہیں ہ = ۶۹۸۷۳ ؛ اور ک کو جمع اور تفریق کرنے سے یہ دوسری اصلیں معلوم ہوتی ہیں ۱،۰۶۸۶۵ اور -۶۹۴۱۳، ۔ (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳،۲)۔

۵۔ لگرانج کے کعبی

لا$^{۳}$ - ۷لا + ۷ = ۰

کو پوری طرح حل کرو۔

تمام اصلوں کی علامتیں بدلو اور استحالہ شدہ مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصل ع معلوم کرو جو ۳ اور ۴ کے درمیان ہے تو

ع = ۳،۰۴۸۹۱۷۳ اور ف (ع) = ۲۰،۸۸۷۳۷

پس کَ$^{۲}$ = ،۰۲۸۱۵۷۵ اور ک = ،۱۶۷۸ - نیز ہ = -۱،۵۲۴۴۵۸ اور ان سے ہ + ک اور ہ - ک کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ اس طور پر حاصل کردہ سب اصلوں کی علامتیں بدلنے سے دی ہوئی مساوات کی اصلیں حاصل ہوتی ہیں

- ۳،۰۴۸۹، ۱،۳۵۶۶، ۱،۶۹۲۲ (دیکھو مثال ۱ دفعہ ۱۱)

اوپر جو مثالیں دی گئی ہیں وہ یہ بتانیکے لئے کافی ہیں کہ اصلوں کی نوعیت کی قبل از قبل جانچ کئے بغیر کس طرح دئے ہوئے کعبی کو حل کیا جا سکتا ہے۔ یہ تصفیہ کرنیکے لئے کہ کعبی کی دوسری دو اصلیں حقیقی ہیں یا خیالی جو محنت برداشت کرنی پڑتی ہے وہ اُس محنت سے کچھ ہی زیادہ ہے
(265) جو اسٹرم کے مسئلہ کو استعمال کرنے میں لاحق ہوتی ہے اور وہ مزید محنت جو اصلوں کو واقعی طور پر معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے بہت خفیف ہے۔ اب ہم چار درجی مساوات پر غور کرینگے۔

**۱۲۵۔ چار درجی کا حل۔** جب چار درجی کی اصلیں (دو یا چار) حقیقی ہوں تو اسکو بھی دفعہ ماسبق میں بیان کردہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے

حل کیا جا سکتا ہے۔ بعض مثالوں میں حقیقی اصل کے وجود کو فوراً پہچان لیا جا سکتا ہے اور جب ایسی صورت ہو تو مساوات کے مکمل حل کے لئے طریقہ ذیل کا استعمال کرنا فائدہ مند ہو گا۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

ف (لا) ≡ لا$^{4}$ + ف لا$^{3}$ + ق لا$^{2}$ + ر لا + س = ۰

اور اسکی حقیقی اصلیں ہیں ع، یہ۔ باقی دو اصلوں کو ھ + ک اور ھ - ک سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس آخری زوج کے متعلق کسی قسم کا مفروض اختیار نہیں کیا گیا۔ فرض کرو کہ ع اور یہ دونوں کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے اور ف′ (ع) اور ف′ (یہ) کی عددی قیمتیں بھی دفعہ ماسبق کی طرح معلوم کر لی گئی ہیں۔ اب اگر ف (لا) میں لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور مثال ۲۶ صفحہ ۳۴۴ کا طریق حل استعمال کیا جائے تو بلا تکلف حاصل ہوتا ہے

- ک$^{2}$ = ۶ ف′ (ھ) ÷ ف‴ (ھ) = (۴ ھ$^{3}$ + ۳ ف ھ$^{2}$ + ۲ ق ھ + ر) ÷ (۴ ھ + ف)

پھر جیسا کہ ثابت کیا جا چکا ہے

ف′ (ع) + ف′ (یہ) + ف′ (ھ + ک) + ف′ (ھ - ک)
= - ف$^{3}$ + ۴ ف ق - ۸ ر،

اور　ف′ (ھ + ک) + ف′ (ھ - ک) = ۲ ف′ (ھ) + ف‴ (ھ) ک$^{2}$،

اسلئے　- ۴ ک$^{2}$ (۴ ھ + ف) = ف′ (ع) + ف′ (یہ) + ف$^{3}$ - ۴ ف ق + ۸ ر،

اس ضابطہ کو ک$^{2}$ کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے جبکہ ھ کی قیمت پہلے سے ہی مساوات ع + یہ + ۲ ھ = - ف سے حاصل کر لی گئی ہو۔ پھر اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے کہ اصلوں کا دوسرا زوج خیالی ہے یا حقیقی بموجب اسکے کہ ک$^{2}$ منفی ہے یا مثبت۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$لا^{۴} - ۳لا^{۳} + ۷لا^{۲} - ۱۰لا + ۱ = ۰$

کو پوری طرح حل کرو۔

یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ایک حقیقی اصل صفر اور ایک کے درمیان وجود رکھتی ہے۔ اس لئے ایک دوسری حقیقی اصل بھی ہونی چاہیئے جسکا ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہارنر کے عمل سے ہم حاصل کرتے ہیں

ع = ۰٫۱۰۷۷۶۷، ب = ۱٫۹۲۳۲۶۲،

$ف'(ع) = -۸٫۵۹۰۷۸$، $ف'(ب) = ۱۲٫۰۹۱۳۳$

اسلئے $ف'(ع) + ف'(ب) + ف^{۳} - ۴ف ق + ۸ر = -۱۹٫۴۹۹۴۵$

نیز ع، ب اور ف کی قیمتوں سے ھ = ۰٫۴۸۴۴۸۵۔ اور ۴ھ + ف = −۱٫۰۶۲۰۶ ۔ پس

$$-۴ک^{۲} = \frac{۱۹٫۴۹۹۴۵}{۱٫۰۶۲۰۶}$$

اب یہ ثابت ہو گیا کہ باقی دو اصلیں خیالی ہیں اور انکی قیمتیں ک کو اس ضابطہ سے محسوب کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ عمل حساب میں لوکارثمی جدولوں سے مدد ملیگی چنانچہ یہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$۰٫۴۸۴۵ \pm ۲٫۱۴۲۴\sqrt{-۱}$$

۲۔ دفعہ ۱۱۰ مثال ۲ کی مساوات

$لا^{۴} - ۱۲لا + ۷ = ۰$

کو پوری طرح حل کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

ع = ۰٫۵۹۳۶۸، ب = ۲٫۰۴۷۲۷

$ف'(ع) = -۱۱٫۱۶۳۵$، $ف'(ب) = ۲۲٫۳۱۸۰$

اسلئے خیالی اصلوں کا زوج ہے

۱-√۲۶..۳۹ ± ۱،۳۲.۴۸-

۳ — مساوات

۲ لا^۳ - ۱۳ لا^۲ + ۱۰ لا - ۱۹ = ۰

کو حل کرو۔

اِسکی دو اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں، ایک (عہ) مثبت اور دوسری (یہ) منفی۔ ۲ سے تقسیم کرو اور مساوات کو اس شکل میں لکھو:-

ف (لا) ≡ لا^۳ - ۶،۵ لا^۲ + ۵ لا - ۹،۵ = ۰

جب، ف (لا) = ۰ کی اصلوں کی علامتوں کو بدلکر، یہ محسوب کرلیا جائے تو فَ (یہ) کی قیمت معلوم کرنیکے لئے ہارنر کے عمل سے حاصل شدہ آخری استحالہ میں آخر سے جو دوسرا سر ہے اسکی علامت بدلنی چاہئے

عہ = ۲،۴۵۷۳۳، یہ = -۳۶۰۳۰۵۵،

فَ (عہ) = ۳۲،۴۰۹، فَ (یہ) = -۶۶،۹۳۶

اسلئے　-۴ک^۲ = ۵،۴۷۳ / ۱،۱۴۶۴

اور خیالی اصلیں ہیں

۱-√۱،۰۹۲۴ ± ۰،۲۸۶۶

۴ — مساوات (267)

لا^۴ - ۸۰ لا^۳ + ۱۹۹۸ لا^۲ - ۱۴۹۳۷ لا + ۵۰۰۰ = ۰

کو حل کرو۔

صریحاً ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے اور دوسری کا ۱۲ اور ۱۳ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۹۳)

عہ = ۰،۳۵۰۹۸، یہ = ۱۲،۷۵۶۴۴

فَ (عہ) = -۱۳۵۶۴، فَ (یہ) = ۷،۵۲۸۶۶

اسلئے　۴ک^۲ = ۴۱۳،۳ / ۵۳،۷۸۵

اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں اور آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہیں ۲۰۶۰۲، ۳۲ اور ۲۲ ۸۳، ۳۴ ۔

اس مساوات کی سب اصلوں کو ینگ نے ہارنر کے طریقہ سے محسوب کیا ہے (دیکھو 'کعبی اور چار درجی مساواتوں کی تحلیل اور حل صفحہ ۲۱۶ تا ۲۲۱) اور ہم نے آخر میں جو دو اصلیں حاصل کی ہیں وہ ینگ کے حاصل کردہ قیمتوں کے مطابق ہیں۔

**۱۲۶ — چار درجی کا حل (گذشتہ سے پیوستہ)** جب چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہوں تو ظاہر ہے کہ دفعہ ماسبق کے حل کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس صورت میں اور عموماً اصلوں کی نوعیت خواہ کچھ ہی ہو طریقہ ذیل استعمال کیا جا سکتا ہے :۔

فرض کرو کہ مساوات سب سے پہلے اسکی دوسری رقم کو خارج کر دینے کے بعد شکل ذیل میں لکھی گئی ہے۔

$$\text{ف (لا)} \equiv \text{لا}^4 + \text{ق لا}^2 + \text{ر لا} + \text{س} = 0$$

اسکی اصلوں کو ھ ± ک، ۔ھ ± ک′ فرض کیا جا سکتا ہے۔ یہاں اصلوں کی نوعیت کے متعلق کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا ہے۔ انکی نوعیت ک² اور ک′² کو محسوب کر لینے کے بعد انکی علامتوں پر منحصر ہوگی۔ لا کی بجائے ھ + ک درج کرنے اور پہلے کی طرح عمل کرنے سے

$$-\text{ک}^2 = \frac{6\,\text{ف}'(\text{ھ})}{\text{ف}'''(\text{ھ})} = \frac{4\,\text{ھ}^3 + 2\,\text{ق ھ} + \text{ر}}{4\,\text{ھ}}$$

یعنی

$$-4\,\text{ک}^2 = 4\,\text{ھ}^2 + 2\,\text{ق} + \frac{\text{ر}}{\text{ھ}}$$

جس سے ک معلوم ہوتا ہے جبکہ 'ھ' معلوم ہو جائے۔ ک کو جب مثال ۲۶ صفحہ (۲۲۴) کی دو مساواتوں سے ساقط کیا جاتا ہے تو

ھ میں جو چھ درجی حاصل ہوتا ہے وہ کعبی

$$ما^{۳} + ۲ق\, ما^{۲} + (ق^{۲} - ۴س)\, ما - ر^{۲} = ۰$$

میں تحویل ہو جاتا ہے جسکی ایک اصل ۴ ھ^۲ ہے۔ اس کعبی کی ایک اصل مثبت ہونی چاہیئے۔ باقی دو اصلیں دونوں مثبت، دونوں منفی یا دونوں خیالی ہو سکتی ہیں بموجب اس کے کہ دیئے ہوئے چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کیا ہے۔ یہ مساوات فی الواقعی زیر بحث چار درجی کے لئے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۱۸۳) محول کعبی ہے (جسکی اصلوں کو ۴ سے ضرب دیا گیا ہے)۔ فرض کرو کہ اس کی مثبت اصل کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے (اگر تینوں اصلیں مثبت ہوں تو کسی ایک کا محسوب کرنا کافی ہے) اس طرح ۴ ھ^۲ متعین ہو جاتا ہے اور اس سے ھ۔ پھر مجوزہ چار درجی کا پورا حل ان دو ضابطوں سے ملجاتا ہے:— (268)

$$ه \pm \sqrt{-\frac{۱}{۴}\left(۴ه^{۲}+۲ق+\frac{ر}{ه}\right)}،\quad -ه \pm \sqrt{-\frac{۱}{۴}\left(۴ه^{۲}+۲ق-\frac{ر}{ه}\right)}$$

# مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^{۴} + لا + ۱۰ = ۰$$

کا مکمل حل معلوم کرو۔

اس مساوات کو مرفی ( Murphy. ) نے (اپنی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" صفحہ ۱۲۵ میں) اپنے اس مجوزہ طریقہ کی توضیح میں استعمال کیا ہے جو متوالی سلسلوں کی مدد سے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو متعین کرنیکا ہے ہمیں فوراً محول کعبی حاصل ہوتا ہے

$$ما^{۳} - ۴۰\, ما - ۱ = ۰$$

اور ہارنر کے عمل سے اسکی مثبت اصل ۶٫۳۳۲۷۰۱۸۴ ہے۔ پس ھ$^{۲}$ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور اس سے ھ = ± ۱٫۲۵۸۶۔ پھر ہم حاصل کرتے ہیں ر/ھ = ± ۰٫۷۹۴۵۔ بموجب اسکے کہ ھ کی علامت مثبت یا منفی استعمال کی گئی ہو۔ ہر صورت میں جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اس لئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ اِن کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے اور وہ یہ ہیں

۱٫۲۵۸۶ ± ۱٫۳۳۵۲ √−۱ ، −۱٫۲۵۸۶ ± ۱٫۱۷۷۱ √−۱

۲۔ مساوات

لا$^{۴}$ + ۹ لا$^{۲}$ − ۶ لا + ۵ = ۰

کو حل کرو۔

اس مساوات پر "اسپٹزر" (Spitzer.) نے بحث کی ہے (*Allgemeine Auflosung der Zahlen-Gleichungen*. p. 15.) اس کے لئے محول کعبی ہے

ا$^{۳}$ + ۱۸ ا$^{۲}$ + ۱۶۱ ا − ۳۶ = ۰

جسکی مثبت اصل ۰٫۱۵۱۰۹۴۲۴۹ ہے۔ پس ھ = ± ۰٫۳۵۷۴۰ اور اسلئے ر/ھ = ± ۱۶٫۷۸۷۸ اور ہر صورت میں، خواہ ھ کو مثبت لیا جائے یا منفی، جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اسلئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ یہ چار اصلیں ہیں

۰٫۳۵۷۴ ± ۰٫۱۶۵۶۳ √−۱ ، −۰٫۳۵۷۴ ± ۲٫۹۷۰۲ √−۱

۳۔ مساوات

(269) لا$^{۴}$ − ۲ لا$^{۳}$ − ۷ لا$^{۲}$ + ۱۰ لا + ۱۰ = ۰

کو حل کرو۔

دوسری رقم کے اخراج کے لئے اصلوں کو ۲ سے ضرب دو اور پھر اِن کو بقدر ایک کے گھٹاؤ۔ استحالہ شدہ مساوات کا محول کعبی آسانی کے ساتھ

حاصل ہوتا ہے

ما$^{3}$ – ۶۸ ما$^{2}$ + ۳۲۰ ما – ۲۵۶ = ۰

اسکی اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرو اور معلوم کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل ۶ اور ۷ کے درمیان ہے جو ہارنر کے عمل سے حاصل ہوتی ہے ۶٫۲۹۸۳۸ – پس ۴ ھ$^{2}$ = ۶۲٫۹۸۳۸ اور ھ = ±۳٫۹۶۸ –
اب خواہ ھ کو مثبت لیا جائے یا منفی یہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت عدد ہے اور اسلئے اس صورت میں تمام اصلیں حقیقی ہیں – چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں ۴ ک$^{2}$ = ۰٫۴۸۴۰۹۱۰ اور ۴ ک'$^{2}$ = ۰٫۰۰۴۸۹۴ پس ک = ±۰٫۴۰۵۱۱ اور ک' = ±۰٫۰۴۹۷۶
اب دوسری رقم کو خارج کرنے میں جو دو استحالے عمل میں لائے گئے تھے اِن کو حساب میں شامل کر لینے سے مطلوبہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۲٫۷۳۲ ، ۲٫۲۳۶ ، – ۰٫۷۳۲ ، – ۲٫۲۳۶

اس نتیجہ کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ یہ دیا ہوا تفاعل اجزائے ضربی لا$^{2}$ – ۵ اور لا$^{2}$ – ۲ لا – ۲ کا حاصل ضرب ہے (مثال ۵ صفحہ (۳۱۴) کے ساتھ مقابلہ کرو) –

۴ — مساوات

لا$^{4}$ – ۷ لا$^{3}$ + ۷ لا$^{2}$ – ۷ لا + ۷ = ۰

کو حل کرو –

اس مثال پر جلینک ( Jelinek. ) نے بحث کی ہے Die Aufrosung hoheren numerischeu Gleichungen, P. 29 دوسری رقم کو خارج کرنے کے لیے اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور پھر بقدر ۷ کے گھٹاؤ – اس طریقہ سے ہم حاصل کرتے ہیں

لا$^{4}$ – ۱۸۲ لا$^{2}$ – ۱۶۲۴ لا – ۳۰۵۹ = ۰

جسکا محول کعبی ہے

ما$^{3}$ – ۳۶۴ ما$^{2}$ + ۴۵۳۶۰ ما – ۲۶۳۷۴۷۶ = ۰

اسکی مثبت اصل کا محل کرنے کے لئے اصلوں کو ۱۰۰ سے تقسیم کرنا بہتر ہوگا

جس سے استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ ہارنر کے عمل سے یہ اصل حاصل ہوتی ہے ۲۰،۵۹۱۔ اسلئے ۴ھ^۲ = ۲۰۵،۹۱ اور ھ = ± ۷،۱۷۔ اب اگر ھ کو مثبت لیا جائے تو جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت ہے اور اس لئے دو اصلیں حقیقی ہیں۔ اگر ھ کو منفی لیا جائے تو جذر المربع کے تحت کی مقدار منفی ہے اور اسلئے دو اصلیں خیالی ہیں۔ پس دوسری رقم کو خارج کرنیکے لئے جو دو استحالے عمل میں لانے پڑے ان کو حساب میں شامل کر لینے کے بعد مجوزہ مساوات کی چاروں اصلیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

۵،۹۹۳ ، ۱،۰۹۱ ، − ۰،۰۴۲ ± ۱،۰۲۳ $\sqrt{-1}$

۵۔ مساوات

لا^۴ − ۸۰ لا^۳ + ۱۹۹۸ لا^۲ − ۱۴۹۳۷ لا + ۵۰۰۰ = ۰

کو حل کرو۔

یہ ینگ کی مساوات ہے جسکو دفعہ ماسبق میں حل کیا گیا تھا۔ ہم اسکے حل کو اس دفعہ کے طریقہ سے مکرر معلوم کرتے ہیں تاکہ طالب علم کو اس محنت کا اندازہ ہو جائے جو دونوں طریقوں میں کرنی پڑتی ہے جب دوسری رقم آسانی کے ساتھ جدا ہو جائے (جیسا کہ اس مثال میں) یا جب دوسری رقم خود مساوات میں موجود نہ ہو تو یہ معلوم ہوگا کہ دفعہ ہذا کا طریقہ دفعہ ماسبق کے طریقہ سے زیادہ آسان ہے۔ اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات ہے (270)

لا^۴ − ۴۰۲ لا^۲ + ۹۸۳ لا + ۲۵۴۶۰ = ۰

جسکا محول کعبی ہے

م^۳ − ۸۰۴ م^۲ + ۵۹۷۶۴ م − ۹۶۶۲۸۹ = ۰

ہارنر کے عمل سے ۴ھ^۲ = ۷۲۳۲۱،۳۸ اور اس لئے ھ = ± ۱۳۴،۴۶۲، ھ کی علامت کچھ ہی ہو جذر المربع کے تحت کی مقدار مثبت ہے اور اسلئے چاروں اصلیں حقیقی ہیں جنکو معلوم کرنیکے لئے

یہ دو ضابطے ہیں

- ھ ± √۳۸٫۴۷۳۹ ، ھ ± √۱٫۹۲۰۹

پس ہر اصل میں ۲۰ جمع کرنے سے مجوزہ مساوات کی یہ چار اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۱۲٫۷۵۶۵ ، ۰٫۳۵۱۱ ، ۳۴٫۸۳۲۱ ، ۳۲٫۰۶۰۳

۶ ۔ مثال ۴ صفحہ ۳۰۴ کی مساوات

لا^۴ - ۳ لا^۲ + ۷۵ لا - ۱۰۰۰۰ = ۰

کو پوری طرح حل کرو ۔

اصلیں ہیں ۹٫۸۸۶۰ ، -۱۰٫۲۶۰۹ ، ۰٫۱۸۷۴۸ ± ۹٫۹۲۷ √-۱

۷ ۔ مثال ۲ صفحہ ۳۱۲ کی مساوات

لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۳ لا + ۲۳ = ۰

کو پوری طرح حل کرو ۔

اصلیں ہیں ۳٫۷۸۵۳ ، ۲٫۰۵۲۲ ، -۰٫۹۱۸۹ ± ۱٫۴۵۴۵ √-۱

۸ ۔ مثال ۴ صفحہ ۳۲۱ کی مساوات

لا^۴ + ۳ لا^۳ - لا^۲ - ۳ لا + ۱۱ = ۰

کو حل کرو ۔

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور دوسری رقم کو خارج کرو۔ اسکے محول کعبی پر ہارنر کا طریقہ استعمال کرو تو معلوم ہوگا کہ اسکی ایک متوافق اصل ۱۸۰ ہے، پس ھ = ۳ √۵ ۔ حل کو آسانی کے ساتھ مکمل کیا جا سکتا ہے اور مجوزہ مساوات کی چار خیالی اصلوں کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے

- ۳/۴ + ۳/۴ √۵ ± ۱/۴ √(-۱۰ - ۲ √۵) ، - ۳/۲ - ۳/۴ √۵ ± ۱/۴ √(-۱۰ + ۲ √۵)

۹ ۔ مثال ۱۴ صفحہ ۳۷۱ کی مساوات

لا^۴ - ۱۱٫۷۲۷ لا + ۴۰٫۳۸۵ = ۰

کی خیالی اصلیں معلوم کرو ۔

جواب :- -۱۲٫۴۴۳۳ ± ۱۹٫۷۵۹۶ √-۱

(271)

# نوٹ (۱)

## مساواتوں کا جبری حل

مساوات درجۂ دوم کا حل عربوں کو معلوم تھا چنانچہ محمد بن موسیٰ اور نویں صدی کے دیگر مصنفین کی تصنیفات میں اسکا ذکر موجود ہے عمر خیام کا ایک مقالہ، جبر و مقابلہ کے مضمون پر، اسوقت موجود ہے جو شاید گیارہویں صدی کے وسط میں تحریر کیا گیا تھا۔ اس میں کعبی مساواتوں کی جماعت بندی ہندسی عمل کے طریقوں کے ساتھ کی گئی ہے لیکن عام حل حاصل کرنے کی کوئی کوشش نہیں کی گئی۔ تیرہویں صدی کے شروع میں لیونارڈو (مقام پی سا کا باشندہ) نے عربوں سے اس مضمون کی تحصیل کی اور اس کو اٹلی میں منتقل کیا اور اسوقت سے ایک عرصہ دراز تک اٹلی والے اس علم کے سرپرست رہے۔ لوکس پیاسیولس نے (جو لوکس ڈی برگو کے نام سے مشہور ہے) ایک کتاب "L' Arte Maggiore" کے نام سے سنہ ۱۴۹۴ء میں شائع کی۔ اس نے کعبی مساواتوں میں عربوں کی جماعت بندی کا تتبع کیا اور یہ رائے ظاہر کی کہ اس علم کی موجودہ حالت کا لحاظ کرتے انکا حل حاصل کرنا اتنا ہی ناممکن ہے جتنا دائرہ کی تربیع کرنا۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ اس بات کا بھی اشارہ کرتا ہے کہ اس علم کی ترقی میں سب سے پہلا مسئلہ یہی ہوگا جسکی طرف علمائے ریاضی کی توجہ منعطف ہوگی۔ مساوات $لا^{3} + م\ لا = ن$ کا حل سیپیو فیرو (Scipio Ferreo) نے معلوم کیا لیکن اُس کے انکشاف کا حال کسی کو معلوم نہ ہو سکا سوائے اس بات کے کہ اُس نے اپنے طالب علم

فلاریڈو کو سنہ ۱۵۰۵ء میں اس حل سے آگاہ کیا۔ ٹارٹاگلیا (Tartaglia)
کی توجہ اس مسئلہ کی طرف سنہ ۱۵۳۰ء میں منعطف ہوئی اور وہ بھی اس
اس وجہ سے کہ کولا (colla.) نے ایک ایسا مسئلہ تجویز کیا تھا
جسکا حل، $لا^{3} + ف لا^{2} = ق$ کی شکل کی کعبی مساوات پر منحصر تھا۔
فلاریڈو کو جب اس بات کا علم ہوا کہ ٹارٹاگلیا نے اس مساوات کا
حل حاصل کرلیا ہے تو اس نے $لا^{3} + م لا = ن$ کی شکل کی کعبی مساوات
کے حل کا جو اسکو معلوم تھا اعلان کردیا۔ ٹارٹاگلیا کو اس کے بیان کی
صداقت پر شبہ ہوا اور اس نے سنہ ۱۵۳۵ء میں اسکو دعوت مقابلہ دیدی اور اس اثناء
میں خود بھی $لا^{3} + م لا = ن$ کا حل دریافت کرلیا۔ یہ حل لا کی بجائے (272)
$\sqrt[3]{ت} - \sqrt[3]{ع}$ فرض کرنے پر منحصر ہے جو دو جذر الکعبوں کے فرق پر
مشتمل ہے۔ کارڈن کے نام سے جو حل منسوب کیا جاتا ہے وہ دراصل
اسی حل کی بنیاد پر قائم کیا گیا ہے۔ ٹارٹاگلیا نے اپنی سعی کو جاری
رکھا اور مختلف شکل کی کعبی مساواتوں کو جو عرب مصنفین کی تقسیم
کے تحت آتی تھیں حل کرنیکے لئے قوانین دریافت کئے۔ کارڈن
نے جو ان قوانین کو حاصل کرنے کی فکر میں تھا ٹارٹاگلیا سے درخواست
کی مگر ناکام رہا۔ آخر بہت کچھ منت سماجت کے بعد ٹارٹاگلیا راضی
ہوا اور اُس نے ان قوانین کی تفہیم کی مگر ساتھ ہی کارڈن سے وعدہ
لے لیا کہ وہ اس کو اپنے سینہ میں راز کے طور پر محفوظ رکھیگا اور کسی کو
اسکا علم نہ ہونے دیگا۔ اپنے وعدہ کو بالائے طاق رکھکر کارڈن نے
ٹارٹاگلیا کے قوانین کو اپنی عظیم الشان تصنیف ("Ars Magna") میں
سنہ ۱۵۴۵ میں شائع کردیا حالانکہ ٹارٹاگلیا کا ارادہ تھا کہ وہ ان کو اپنی تصنیف
میں شائع کریگا۔ اس نے اپنی تصنیف کی ابتدا سنہ ۱۵۵۶ء میں کی لیکن
سنہ ۱۵۵۹ء میں کعبی مساواتوں کی بحث پر پہنچنے سے پہلے ہی انتقال
کرگیا۔ اب چونکہ اس کی تصنیف میں اس کے دریافت کردہ قوانین کا

ذکر موجود نہ تھا یہ قوانین امتداد زمانہ کی باعث کارڈن سے منسوب کئے جانے لگے اور ان کے انکشاف کا سہرا اسی کے سر باندھ دیا گیا۔

ظاہر ہے کہ اسکے بعد علماء جبر و مقابلہ کی توجہ فطرتاً درجہ چہارم کی مساواتوں کے حل کی طرف منعطف ہوئی اور یہاں بھی کولاہی اسکا باعث ہوا کیونکہ اس نے مساوات

$$\text{لا}^{4} + 6\,\text{لا}^{2} + 36 = 60\,\text{لا}$$

کو حل کرنے کی تجویز اُس وقت کے علماء کے سامنے پیش کی۔ کارڈن نے اس قسم کی مساواتوں کے لئے ایک ضابطہ حاصل کرنیکی سعی کی لیکن اسکا انکشاف اس کے طالب علم فیراری ( Ferrari ) کی قسمت میں تھا۔ فیراری نے جو طریقہ استعمال کیا تھا وہ ایک استحالہ پر مبنی ہے جس سے مساوات کی طرفین کامل مربع بن جاتی ہیں۔ اس میں ایک نئی مقدار داخل کیجاتی ہے جو خود ایک تیسرے درجہ کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔ یہ فی الحقیقت خاصیت میں دفعہ ۶۲ کا طریقہ ہے اور اس کو بعض اوقات بومبیلی ( Bombelli ) سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اسکو اپنے مقالہ جبر و مقابلہ میں ۱۵۷۹ء میں شائع کیا۔ سمسن کے نام سے جو حل مشہور ہے وہ اگرچہ بہت بعد (تقریباً ۱۷۴۰ء میں) شائع ہوا لیکن اصولاً کسی حال میں بھی فیراری کے حل سے مختلف نہیں ہے۔ ۱۶۳۷ء میں ڈیکارٹ کا شہرۂ آفاق رسالہ شائع ہوا جس میں علم جبر و مقابلہ کی بہت سی ترمیمات و اصلاحات درج ہیں۔ ان میں سے قابل ذکر یہ ہیں، مساواتوں کی منفی اور خیالی اصلوں کی جانچ اور اس کا علامتوں کا قانون۔ چار درجی کو دو دو درجی اجزاء کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرنا اگرچہ فیراری کی شکل سے آسانی کے ساتھ اخذ ہو سکتا ہے تاہم چار درجی کے حل میں قابل قدر اضافہ ہے۔ یولر کا جبر و مقابلہ ۱۷۷۰ء میں شائع ہوا۔ اس نے چار درجی کا جو حل پیش کیا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱) وہ اس لحاظ سے اہم ہے کہ اس کی شکل اور

(273)

کعبی کے حل کی شکل میں تطابق اور تشابہ پایا جاتا ہے کیونکہ دونوں صورتوں میں اصل کے لئے غیر منطق جملہ فرض کرکے مساواتوں کو حل کیا جاتا ہے ڈیکارٹ اور یولر کے طریقے اُن کوششوں کا نتیجہ ہیں جو انہوں نے مساواتوں کا عام جبری حل دریافت کرنے میں کی تھیں۔ اٹھارویں صدی میں علماء ریاضی نے اس مسئلہ پر بہت زور لگایا اور بڑی چھان بین کی مگر چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجوں کی مساواتوں کی صورت میں انکی محنت کامیاب نہیں ہوئی۔

کعبی اور چار درجی کے جو حل علماء قدیم نے حاصل کئے اِنمیں دو جداگانہ طریقے ہمارے مشاہدہ میں آتے ہیں۔ پہلا وہ ہے جو ٹارٹاگلیا اور یولر کے مفروضات پر مبنی ہے اور جس کی ابتدا اصل کیلئے ایک غیر منطق تصریحی شکل اختیار کرنے سے ہوتی ہے۔ دوسرا وہ ہے جس میں دئے ہوئے تفاعل کے ایک استحالہ کی مدد سے اس بات کا کھوج لگایا جاتا ہے کہ آیا اس کے اجزائے ضربی کی نوعیت بدلی جاسکتی ہے تاکہ وہ ایسی شکل میں تحویل ہو جائے جو آسانی سے تحلیل ہو سکے۔ دفعہ ۵۵ میں یہ دونوں طریقے بیان کردئے گئے ہیں اور ان کے ساتھ ایک تیسرے کا بھی ذکر کیا گیا ہے جسکو وانڈرمنڈ اور لگرانج نے دریافت کیا تھا۔ انہوں نے اپنی تحقیقاتوں کو اُسی زمانہ میں شائع کیا تھا یعنی ۱۷۷۰ء اور ۱۷۷۱ء میں۔ ان میں سے وانڈرمنڈ ہی پہلا شخص تھا جس نے کسی مساوات کے جبری حل کی ضروری خاصیت کو صاف طور پر واضح کیا جو یہ ہے کہ کسی مساوات کا جبری حل، جذری علامات (جو اس میں شامل ہوتی ہیں) کے اجتماع کی وجہ سے، تمام اصلوں کو بلا امتیاز تعبیر کرنا چاہئے جبکہ اس میں شامل ہوئے ہوئے عددوں کے تفاعلوں کی بجائے اصلوں کے متشاکل تفاعل درج کئے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۰۱)۔ کعبی اور چار درجی کی صورتوں میں اس نوعیت کے ضابطے حاصل کرنے میں اس کی کوششیں بار آور ہوئیں لیکن

پانچ درجی کی صورت میں ناکام رہیں۔ لگرانج نے اپنے پیش روؤں کی مختلف کوششوں کو جو مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں صرف ہوئی تھیں اکٹھا کرنے اور ان پر نظر ثانی کرنے کا بیڑا اٹھایا اور ان سب کے نتیجوں کو ایک یکساں اصول میں منسلک کیا۔ یہ اصول اس بات پر مشتمل ہے کہ دی ہوئی مساوات کے حل کو ایک ایسی مساوات کے حل میں تحویل کیا جائے جسکا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کم ہو اور جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں اور اکائی کے جذروں کے خطی تفاعل ہوں۔ وہ یہ بھی ثابت کرتا ہے کہ پانچ درجی کو اس طرح تحویل نہیں کیا جا سکتا کیونکہ وہ مساوات جس پر اس کا حل منحصر ہوتا ہے چھٹے درجہ کی مساوات ہے۔

اب چونکہ پانچویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے کی تمام کوششیں رائیگاں گئیں اسلئے علماء ریاضی کے دلوں میں فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسکا حل ممکن بھی ہے۔ چنانچہ ایبل اور وانٹزل نے ثابت کر دیا (دیکھو سیرٹ کی تصنیف (Cours L' Algebre Superieure) کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کو جس کی شکل پر کوئی قید نہ ہو حل کر لینا ناممکن ہے۔
تاہم ایم۔ ہرمائٹ نے پانچ درجی کا ایک ماورائی حل دیا ہے جسکی شکل (274)
میں ناقصی تکملے شامل ہوتے ہیں۔ لگرانج کی تحقیقاتوں کے بعد سے پانچ درجی کی بحث میں جو دوسرے اضافے ہوئے ہیں ان میں سے اہم ایک یہ ہے کہ اسکو سہ رقمی شکل میں (شرن ہاسن کی) استحالہ کی مدد سے بیان کیا جا سکتا ہے۔ شرن ہاسن خود بھی ۱۶۸۳ء میں ما = ف + ق لا + لا$^2$ کے مفروضہ کی مدد سے کعبی اور چار درجی کو تحویل کرنے میں کامیاب ہوا تھا اور قیاس لگایا تھا کہ اسی قسم کا عمل عام مساوات پر بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ پانچ درجی کی تذکرۂ بالا سہ رقمی تحویل کو مسٹر جیرارڈ نے میتھیمیٹکل ریسرچ ۱۸۳۲ء ۲۵ میں شائع کیا اور ایم۔ ہرمائٹ کا بیان ہے کہ پانچ درجی کی بحث میں یہ تحویل اہم ترین اضافہ ہے۔

خصوصاً ایسی صورت میں جبکہ ایبل نے یہ ثابت کر دیا تھا کہ اسکا حل ناممکن ہے۔ ایک مقالہ میں جس کو رابرٹ ہارلی نے کوارٹرلی جرنل آف میتھامیٹکس حصہ ششم صفحہ ۳۸ میں شائع کیا تھا اس بات کو ثابت کیا ہے کہ یہ تحویل پہلے ہی عمل میں آچکی تھی کیونکہ اسکو سویڈن کے ریاضی داں برنگ نے ۱۷۸۶ء میں حاصل کیا تھا۔ ڈاکٹر سلوسٹر کا انتحال بھی بہت اہم ہے جس کے ذریعہ سے پانچ درجی کو تین پانچویں درجہ والی رقموں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ ایسی شکل ہے جو پانچ درجی کو استعمال کرنے میں بڑی سہولت پیدا کرتی ہے۔ پانچ یا اس سے زیادہ درجہ والی مساواتوں کی بحث میں جو اور اضافے زمانہ حال میں ہوئے ہیں وہ زیادہ تر ان اشکال کے ہم تغیروں اور غیر متغیروں سے متعلق ہیں۔ ان تحقیقاتوں کا کچھ ذکر اس تصنیف کی دوسری جلد میں ہے لیکن اور زیادہ تحقیق سے کام لینا ہے تو طالب علم کو Clebsch, کی "Theorie der binaren algebraischen" اور سامن کی " Lessour Introductory to the Modern Higher Algebra کا مطالعہ کرنا چاہیئے۔

# نوٹ (ب)

(275)

## عددی مساواتوں کا حل

عددی مساواتوں کی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنیکی پہلی سعی جو کیگئی اسکو ویٹا نے سنہ ۱۶۰۰ء میں شایع کیا۔ اس سے پہلے کارڈن نے کعبی پر "محل باطل" (جسکو وہ regula aurea کہتا ہے) کا قانون جاری کیا تھا مگر اس طریقہ سے جو نتیجے حاصل ہوے انکی کوئی قدر و قیمت نہیں۔ ویٹا کو خیال ہوا کہ دی ہوئی مساوات کی کسی خاص عددی اصل کو ایسے طریقہ سے حاصل کرنا ممکن ہے جو جذر المربع اور جذر الکعب نکالنے کے معمولی اعمال کے مشابہ ہے۔ پھر اسکے دل میں یہ سوال پیدا ہوا کہ ان معلومہ عملوں میں کس قسم کی ترمیم ہونی چاہئے کہ ان کی مدد سے مساوات کی اصل حاصل ہو سکے جبکہ مساوات کے سر دیئے ہوے اعداد ہوں۔ مساوات ف (لا) = ق لیکر جہاں ق دیا ہوا عدد ہے اور ف (لا) ایک کثیر الارقام ہے جس میں لا کی مختلف قوتیں شامل ہیں ویٹا نے یہ ثابت کیا کہ ف (لا) میں اصل کی معلومہ تقریبی قیمت درج کرنے سے اصل کا دوسرا ہندسہ (جو کسر اعشاریہ میں بیان کیا گیا ہو) عمل تقسیم سے حاصل ہو سکتا ہے۔ جب یہ قیمت حاصل ہو جائے تو اس عمل کو دہرانے سے اصل کا ایک اور ہندسہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ وقس علی ہذا۔ یہ امر غور طلب ہے کہ اس طریقہ کا اصول اس خاص اصول کے مماثل ہے جو نیوٹن اور ہارنر کے تقریب کے طریقوں میں مضمر ہے۔ (دیکھو دفعات

۱۰۷، ۱۰۸)۔ وئیٹا کے بعد سے جو کچھ اس طریقہ میں اضافہ ہوا ہے وہ صرف عمل حساب کو اس طور پر ترتیب دینا ہے کہ اصل کے معلوم کرنے میں صحت اور آسانی پیدا ہو جائے ورنہ اصولاً کوئی اختلاف نہیں ہے۔ اِس باب میں کسقدر بڑی ترقی ہوئی ہے اسکا اندازہ مانٹوکلا (Montucla.) کے بیان سے بخوبی ہو سکتا ہے جو اس کی تصنیف تاریخ ریاضیات (Histoire des Math.) جلد اول صفحہ ۶۰۳ میں درج ہے۔ وئیٹا کے طریقہ تقرب پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ چار درجی کی اصل کو اعشاریہ کے گیارہ مقامات تک معلوم کرنیکا عملِ حساب (جسکو والس (Wallis) نے پورا کیا) از حد صبر آزما کام ہے لیکن اب وہی عمل حساب بہت آسانی کے ساتھ ہر وہ شخص کر سکتا ہے جس نے ہارنر کے طریقہ میں مہارت حاصل کی ہو۔

نیوٹن کا تقرب کا طریقہ سنہ ۱۶۶۹ء میں شائع ہوا لیکن اس کے قبل وئیٹا کا طریقہ استعمال کیا جاتا تھا جسکو ہیاریو، آٹریڈ، پیل اور دوسروں نے کچھ آسان بنا دیا تھا۔ نیوٹن کے بعد سمپسن اور برنولی نے خود کو اس مسئلہ کی طرف متوجہ کیا۔ چنانچہ اسکا نتیجہ یہ ہوا کہ ڈینیل برنولی مساوات (276) کی اصل کو متوالی سلسلہ کی شکل میں بیان کرنے میں کامیاب ہوا اور یولر نے بھی اصل کے لئے اسی قسم کا جملہ حاصل کیا۔ لیکن یہ دونوں طریقے لگرانج کے بیان کی بموجب کسی طرح بھی نیوٹن کے حل سے اصولاً مختلف نہیں ہیں۔

پس لگرانج کے زمانہ تک عددی مساوات کی اصل کو تقریبی طور پر حاصل کرنے کا صرف ایک طریقہ تھا اور یہ طریقہ جسکو بالآخر ہارنر نے تکمیل کیا اب تک بہترین طریقہ چلا آتا ہے۔

لگرانج نے کتاب محولہ بالا میں نیوٹن اور وئیٹا کے طریقوں کے نقائص کو واضح کیا ہے۔ وئیٹا کے طریقہ کا حوالہ دیتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ اس میں بہت سی آزمائشوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور

اس پر اعتماد نہیں کیا جا سکتا جب تک کہ مساوات ف(لا) = ق کی دائیں جانب کی تمام رقمیں مثبت نہ ہوں۔ نیوٹن کے طریقہ میں وہ یہ نقائص بتاتا ہے:۔ اول، اس سے متوافق اصل محدود رقموں میں حاصل ہو نہیں سکتی۔ دوم، عمل میں یہ خوف کہ کہیں ہر نئی تصحیح درست ہے یا نہیں۔ بالآخر، اس مساوات کی صورت میں اس طریقہ کی ناکامی جسکی اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔

لگرانج نے جس مسئلہ کو اپنے لئے پیش کیا وہ یہ تھا:۔

"اگر ایک عددی مساوات دی گئی ہو جس کی اصلوں کی نوعیت اور قیمتوں کے متعلق پہلے سے کچھ بھی معلوم نہیں ہے تو ان اصلونکی ممکن ہو تو ٹھیک قیمت دریافت کرنا یا ہر اصل کی تقریبی قیمت تقرب کے مطلوبہ درجہ تک معلوم کرنا۔"

اس مسئلہ کو اس نے حل کرنے کی جو کوشش کی ہے اسکا ذکر کرنے سے بیشتر یہ دیکھنا ضروری ہے کہ متذکرہ بالا تقرب کے طریقوں کے علاوہ اس سمت میں کونسی باتیں معلوم ہو چکی تھیں۔ ہیریٹ نے ۱۶۳۱ء میں مساوات کی ترکیب کو اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں معلوم کیا تھا اور وہ روابط دریافت کر لئے تھے جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں۔ ویٹا نے مکعبی کی صورت میں ان روابط کو اس سے پہلے معلوم کیا تھا لیکن وہ عام صورت میں کوئی ایسا نتیجہ اخذ نہ کر سکا جیساکہ ہیریٹ نے حاصل کیا۔ یہ انکشاف اہم تھا کیونکہ اس سے اس بات کا پتہ چلا کہ صحیح اصل کو مساوات کی مطلق رقم کا جزو ضربی ہونا چاہئے اور ایسی اصلوں کو متعین کرنیکے لئے نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ اسکا لازمی نتیجہ صریح تھا۔ پس اصلوں کے حدود معلوم کرنیکی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوئی تاکہ مقسوم علیہم کے طریقہ اور تقرب کے دوسرے موجودہ طریقوں میں جو محنت کرنی پڑتی تھی وہ کم ہو جائے جیساکہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے ڈیکارٹ پہلا

شخص تھا جس نے مساواتوں کی منفی اور خیالی اصلیوں کو پہچاننے کے لئے ایک معیار دریافت کیا۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کی حقیقی اور خیالی اصلیوں کی تعداد متعین کرنے کے متعلق جس تحقیق کی ابتدا اس نے کی اسکو اسٹرلنگ ڈی گوا اور دوسرے علماء نے جاری رکھا۔

لگرانج نے غور کیا کہ تذکرۂ صدر مسئلہ کو حل کرنے میں سب سے پہلے دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلیوں کی تعداد متعین کرنا اور انکو ایک دوسرے سے جدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے اس نے اس مساوات کا استعمال کرنا تجویز کیا جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلیوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔ ویرنگ نے اس سے پہلے ہی اصلیوں کو جدا کرنیکا یہ طریقہ ظاہر کیا تھا لیکن لگرانج کا بیان ہے [عددی مساواتیں نوٹ سوم] کہ جس وقت وہ اس مضمون پر اپنی یادداشت لکھ رہا تھا وہ ویرنگ کی تحقیقاتوں سے ناواقف تھا اب یہ ظاہر ہے کہ جب فرقوں کی مساوات بنجاتی ہے تو اسکی مثبت اصلیوں کی سفلی حد معلوم کر کے وہ عدد معلوم کرنا ممکن ہے جو دی ہوئی مساوات کی اصلیوں کے فرقوں میں سے سب سے چھوٹے فرق سے کم ہو۔ پھر علی التواتر ان عددوں کو درج کرنے سے جو اس مقدار سے تھوڑا فرق رکھیں دی ہوئی مساوات کی اصلیوں کو جدا کیا جا سکتا ہے۔ جب اس طور پر اصلیں جدا ہو جائیں تو لگرانج کی تجویز ہے کہ انمیں سے ہر ایک کو مسلسل کسور کے طریقہ سے جس کی تشریح اس کتاب میں (دفعہ ۱۱۲) کر دیگئی ہے معلوم کیا جائے۔ اصلیوں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ اس اعتراض سے بچ جاتا ہے جو نیوٹن کے تذکرۂ بالا طریقہ پر وارد ہوتا تھا چنانچہ اس طریقہ سے ہر تقرب میں خطا کی مقدار معلوم ہوتی ہے اور جب اصل متوافق ہو تو عمل خود بخود رک جاتا ہے اور اصل محدود شکل میں معلوم ہوتی ہے۔ لگرانج نے مساواتوں کی خیالی اصلیوں کو حاصل کرنے کے طریقے بھی دئے ہیں اور یہ بھی بتایا ہے کہ اگر مساوات میں

مساوی اصلیں ہوں تو انکو سب سے پہلے موجودہ طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

نظری طور پر لگرانج نے اپنے لئے جو مسئلہ تجویز کیا تھا اس کا حل متذکرۂ بالا تحریر کی رو سے مکمل ہے۔ لیکن عملی طور پر جہاں تک اسکا تعلق ہے وہ محض بیکار ہے۔ کیونکہ چوتھے درجہ کی مساوات کے لئے ہی فرقوں کی مساوات بنانا بہت محنت طلب ہے اور اعلیٰ تر درجہ کی مساواتوں کے لئے قریب قریب ناممکن العمل۔ اگر ہم اصلوں کو جدا کرنیکے وہ آسان ترین طریقے بھی لگرانج کے بقیہ عمل کے ساتھ کام میں لائیں جو لگرانج کے بعد معلوم کئے گئے ہیں تو بھی اس عمل پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ اس سے اصل مسلسل کسر کی شکل میں حاصل ہوتی ہے اور اسکو اس شکل میں حاصل کرنے کے لئے جو محنت درکار ہے وہ اس محنت سے کہیں زیادہ ہے جو اصل کو اعشاری شکل میں حاصل کرنیکے لئے ہارنر کے عمل میں کرنی پڑتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ آخر الذکر عمل اُس مکمل شکل میں جسکو ہارنر نے پیش کیا ہے اُن تمام اعتراضات سے بری ہے جو نیوٹن کے طریقہ پر وارد ہوتے ہیں۔

لگرانج کے بعد ویئٹا اور نیوٹن کے تقرب کے طریقوں میں ہارنر کی ترمیم کے علاوہ عددی مساواتوں کی تحلیل میں فوریر، بوڈان اور اسٹرم نے نہایت اہم اضافے کئے ہیں۔ بوڈان کی تحقیقات ۱۸۰۷ء میں شائع ہوئی اور فوریر کی اسکے انتقال کے بعد ۱۸۳۱ء میں۔ اس میں شک نہیں کہ بوڈان کی تصنیف سے پہلے ہی فوریر نے وہ مسئلہ معلوم کر لیا تھا جو اس کتاب میں ایک ساتھ دونوں کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔ اسٹرم کی تحقیقات ۱۸۳۵ء میں شائع ہوئی۔ اِن مصنفین نے اصلوں کو جدا کرنیکے جو طریقے بیان کئے ہیں انکو پوری طرح اس کتاب میں واضح کیا گیا ہے (دسواں باب)۔ اِن طریقوں کو ہارنر کے طریقہ کے ساتھ شامل کرنے سے ہمیں لگرانج کے مسئلہ کا وہ حل ملجاتا ہے جو خود لگرانج کے

مجوزہ حل سے کہیں زیادہ آسان ہے۔ نیز اس سمت میں اس سے زیادہ سہولت پیدا کرنا ناممکن نظر آتا ہے۔ مساوات کی اصل دریافت کرنے میں محنت سے بچنا اسی طرح محال ہے جس طرح جذر المربع یا جذر المکعب نکالنے کے عمل میں۔ یہ اور بات ہے کہ ہارنر کا عمل اس محنت کو حتی الامکان گھٹا دیتا ہے۔ اصلوں کو جدا کرنے میں بھی خصوصاً بوقت جبکہ دو یا زیادہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں کم یا زیادہ محنت کرنا پڑے گی۔ اس محنت میں کچھ تخفیف ہو سکتی ہے اگر سروں کے تفاعلوں پر جو مساواتوں کے نظریہ میں اسقدر اہم حصہ لیتے ہیں کافی غور کر لیا جائے۔ مثلاً اگر تفاعلوں ہ، ع اور ح کو دئے ہوئے چار درجی کیلئے محسوب کر لیا جائے تو اصلوں کی نوعیت کا فوراً معلوم کر لینا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ ممکن ہے کہ آئندہ کسی زمانہ میں علماء ریاضی اصلوں کو جدا کرنیکا کوئی آسان طریقہ ایجاد کر سکیں جس طرح فی زمانہ سادہ اصلوں کو لوگارثم کے ذریعہ محسوب کیا جا سکتا ہے لیکن فی الحال لگرانج کے مسئلہ کا مکمل ترین حل وہی ہے جو اسٹرم اور ہارنر کے طریقوں کو ملانے سے پیدا ہوتا ہے۔

اوپر جو کچھ بیان کیا گیا وہ صرف عددی مساواتوں کی حقیقی اصلوں پر صادق آتا ہے۔ ہم نے صفحہ ۳۹۵ کے حاشیہ میں اُن کتابوں کا حوالہ دیدیا ہے جنمیں خیالی اور ملتف اصلوں کو محسوب کرنیکے عام طریقے دریافت کرنے کی کوششیں کیگئی ہیں اور دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ تیسرے اور چوتھے درجہ کی عددی مساواتوں کی صورت میں اِن اصلوں کو آسان ترین طریقہ سے کس طرح محسوب کیا جا سکتا ہے۔

(279)

# نوٹ (ج)

## اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ میں جو مسئلہ زیر بحث رہا ہے اُس کے سلسلہ میں یہ ضروری ہے کہ جو کچھ ثابت ہوا وہ واضح طور پر ذہن میں رہے اور جو ثابت ہونا ممکن ہے اسکو اچھی طرح ذہن نشین کیا جائے اگر مساوات

$$ا_۰ لا^ن + ا_۱ لا^{ن-۱} + \dots + ا_ن = ۰$$

میں سروں $ا_۰$، $ا_۱$، ....، $ا_ن$ کو صرف جبری علامات کی طرح بغیر کسی قید کے استعمال کیا جائے یعنی اگر یہ سر کسی قسم کی قید کی پابندی نہ کریں جو حقیقی اعداد یا بارھویں باب میں بحث کردہ ملتف اعداد ہونے سے متعلق ہو تو ایسی مساوات کی صورت میں یہ ثابت نہیں ہوا ہے اور نہ اسکا ثبوت موجود ہے کہ ہر مساوات میں ایک اصل ہوتی ہے۔ وہ مسئلہ جو ثبوت پذیر ہے یہ ہے کہ ن ویں درجہ کی کسی منطق صحیح مساوات کی صورت میں جس کے سر سب کے سب ملتف (بشمول حقیقی) اعداد ہیں ن ملتف اعداد موجود ہوتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ چنانچہ اصطلاحات عدد اور عددی کو بارھویں باب کے وسیع معنوں میں استعمال کرنے سے زیر بحث مسئلہ کو زیادہ صحت کے ساتھ اس شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:-

ن ویں درجہ کی ہر عددی مساوات میں ن عددی اصلیں ہوتی ہیں

جہانتک اس مسئلہ کا تعلق ہے اس میں کوئی شبہ نظر نہیں آتا کہ بالکل سیدھا اور باقاعدہ ثبوت وہ ہے جو خیالی جملوں یا بارہویں باب میں بحث میں آئے ہوئے ملتف عددوں کو استعمال کرنے پر منحصر ہے۔ ملتف عددوں کو مستوی کے نقطوں کے ذریعہ تعبیر کرنیکا خیال سب سے پہلے آرگنڈ کے ذہن میں آیا تھا جس نے ۱۸۰۶ء میں بغیر اپنا نام ظاہر کئے ایک تصنیف شائع کی جو Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques. کے نام سے موسوم ہے اس مصنف نے چند سال بعد جرجان کی "Annales" میں اپنی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ اسمیں شک نہیں کہ آرگنڈ نے اپنے نئے طریقوں کی تشہیر میں بہت کچھ کوشش کی لیکن ان پر بہت کم توجہ کیگئی اور ایک مدت کے بعد انہی طریقوں کو انگلستان میں وارن نے اور فرانس میں مورے نے بلاواسطہ دریافت کیا۔ ان معلومات کا گاؤس نے اپنی کتابوں میں جو ۱۸۳۱ء میں شائع ہوئیں اضافہ کیا اور کوشی نے ان طریقوں کو دفعہ ۱۲۱ کے اہم مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کیا۔ اس مسئلہ کے سلسلہ میں جواب زیر بحث ہے اسکا وہ ثبوت جو ہم نے دفعہ ۱۲۲ میں دیا ہے فی الحقیقت اس ثبوت کی ترمیم ہے جو آرگنڈ کے اصلی مقالہ میں پایا جاتا ہے اور جس کو کوشی نے اپنی کتاب Exercices d'Analyse میں دہرایا ہے۔ ایک ثبوت جو بہت سی باتوں کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا ثبوت کے مشابہ ہے مرّے نے بھی دیا ہے۔

ملتف عددوں کی ہندسی تعبیر دریافت ہونے سے بیشتر مختلف علماء ریاضی مساواتوں کی اصلوں کی نوعیت کا مسئلہ حل کرنے میں مصروف رہے۔ لگرانج نے اپنی کتاب "عددی مساواتوں" نوٹ ہنم میں ان کی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ ان محققین کی فہرست میں ڈالمبرٹ، ڈیکارٹ، یولر، فونسنیکس اور لاپلاس شامل ہیں جنکی توجہ صرف ایسی مساواتوں پر

مرکوز رہی ہے جن کے سر منطق تھے اور انکے پیش نظر یہ مقصد تھا کہ اجزائے ضربی لا - ع، لا - ب، وغیرہ کے وجود کو تسلیم کرکے یہ بتایا جائے کہ اصلیں سب کی سب یا تو حقیقی ہیں یا ا + ب $\sqrt{-1}$ کے نمونہ کی خیالی مقداریں۔ بہ الفاظ دیگر حقیقی عددی سروں والی مساوات میں خیالی اصل کی کوئی اور شکل سوائے ا + ب $\sqrt{-1}$ کے نہیں ہو سکتی جس میں ا اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔ اس مسئلہ کے ثبوت کے لئے عام طور پر جو طریقہ رائج تھا وہ یہ ثابت کرنیکے لئے تھا کہ اُس مساوات کی صورت میں جسکے درجہ میں ۲ کسی قوت ک میں شامل ہوتا ہے اس کے دو درجی جزو ضربی کے وجود کا امکان ایسی مساوات کے حل پر منحصر کیا جا سکتا ہے جس کے درجہ میں ۲ صرف قوت ک - ۱ میں شامل ہو اور اس عمل سے مسئلہ کو تحویل کرکے اسکو اس معلومہ اصول پر منحصر کر دیا جائے جو یہ ہے کہ طاق درجہ کی ہر مساوات جس کے سر حقیقی ہیں ایک اصل رکھتی ہے۔ اس مضمون پر لگرانج نے جو تحقیقاتیں کی ہیں متذکرہُ بالا کتاب میں درج ہیں۔ انکا تعلق صرف ایسی مساواتوں سے ہے جنکے سر حقیقی ہوں۔ اور یہ بالآخر اُسی اصول پر آکر ٹکتی ہیں جو اوپر مذکور ہوا یعنی حقیقی سروں کے ساتھ طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل موجود ہوتی ہے۔

اسی اصول (یعنے طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل کا وجود) پر منحصر کرکے اس مسئلہ کو حل کرنیکے دو طریقے حال ہی میں شائع ہوئے ہیں۔ ایک وہ ہے جو پروفیسر کلفرڈ کا ہے (دیکھو اسکے میتھمائیکل پیپرز صفحہ ۲۰ اور کیمبرج کی فلاسفیکل سوسائٹی کی روئداد جلد دوم ۱۸۷۶ء) اور دوسرا طریقہ میالٹا کا ہے (دیکھو "Translations of the Royal Irish Academy" ۲۶ ویں جلد صفحہ ۵۲۴ ۱۸۷۶ء) ۲م ویں درجہ کی مساوات سے ابتدا کرکے دونوں مصنف سلوسٹر کا اسقاط کا طریقہ استعمال کرتے ہیں تاکہ م (۲م - ۱) ویں درجہ کی مساوات حاصل ہو جائے جس کے حل پر مجوزہ مساوات کی ایک اصل کے وجود کا منحصر ہونا ثابت کیا جاتا ہے۔ اور چونکہ عدد م (۲م - ۱) میں جزو ضربی ۲، عدد ۲م کی بہ نسبت ایک

مرتبہ کم شامل ہوتا ہے یہ مسئلہ بالآخر متذکرۂ بالا طریقوں کی طرح طاق درجہ کی مساوات میں ایک اصل کے وجود کے اصول پر منحصر ہو جاتا ہے ۔
وہ دو مساواتیں جن کے درمیان عمل اسقاط جاری ہوتا ہے م ویں اور (م - ۱) ویں درجہ کی ہیں اور ان طریقوں کے طرز ثبوت کے درمیان جو فرق ہے وہ صرف ان مساواتوں کو حاصل کرنیکے طرز کے لحاظ سے ہے ۔ میالٹ کے طریقہ میں ان مساواتوں کو مجوزہ مساوات کے سادہ استحالہ کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے اور پروفیسر کلفرڈ ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی سے دئے ہوئے کثیر الارقام کو تقسیم کرکے جو باقی رہتا ہے اسکے سِروں کو صفر کے مساوی رکھکر ان کو حاصل کرتا ہے ۔ ان سِروں کی عام شکلیں اس کتاب کی دوسری جلد میں مقطعات کے باب کے آخر کی متفرق مثالوں میں ملینگی اور وہاں یہ بات آسانی سے معلوم ہوگی کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتوں سے ب کو ساقط کرنے سے ع میں ایک مساوات ملتی ہے جسکا درجہ م (۲ م - ۱) ہے۔ (دیکھو مثال ۳۸ صفحہ ۱۰۱ جلد دوم) ۔

---

# تمت

۷۸۶

# اشاریہ

## مساواتوں کا نظریہ

## جلد اول

نوٹ:۔ اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

# اصطلاحات

## مساواتوں کا نظریہ

### جلد اول

| | |
|---|---|
| Absolute term | رقم مطلق |
| Ambiguous sign | مبہم علامت |
| Amplitude | سعت |
| Binomial | ثنائی، دو رقمی |
| Biquadratic | چار درجی |
| Circular functions | دائری تفاعل |
| Commensurable roots | متوافق اصلیں |
| Complex number | ملتف عدد |
| Complex variable | ملتف متغیر |
| Covariant | ہم متغیر |
| Derived function | مشتق تفاعل |
| Dialytic | بین تحلیلی |
| Equation of squared differences | مربع دار فرقوں کی مساوات |
| False position | باطل محل، کاذب محل |
| Fundamental Equation | بنیادی مساوات |

| | |
|---|---|
| Homogeneous products | متجانس حاصل ضرب |
| Homographic transformation | ہم رسم استحالہ |
| Incommensurable roots | متباین اصلیں |
| Inferior limit | سفلی انتہا |
| Integral values | صحیح عددی قیمتیں |
| Invariants | غیر متغیر |
| Leading cœfficients | صدر سر، فائق سر |
| Limiting equations | انتہائی مساواتیں |
| Method of divisors | مقسوم علیہم کا طریقہ، مقسوموں کا طریقہ |
| Modulus | مقیاس |
| Multiple roots | ضعفی اصلیں |
| Numerical equatious | عددی مساواتیں |
| Order and weight of symmetric functions | متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن |
| Polynomial | کثیر الارقام، کثیر رقمی |
| Precession | استقبال |
| Quadrature | تربیع |
| Quantic | کثیر درجی |
| Quintic | پنج درجی |
| Rational & Integral function | منطق صحیح تفاعل، منطق اور کملہ تفاعل |
| Reciprocal | متکافی |
| Reducing cubic | محول کعبی |
| Sextic | چھہ درجی، شش درجی |
| Special roots | خاص اصلیں |

| | |
|---|---|
| علوی انتہا | Superior limit |
| متشاکل تفاعل | Symmetric function |
| مستحیل کرنا | Transform |
| استحالہ | Transformation |
| استحالہ شدہ، مستحیل | Transformed |
| آزمائشی مقسوم علیہ یا مقسم | Trial divisor |
| سہ رقمی | Trinomial |